宋雷 著

全球与区域重力场逼近理论方法

The Approximation Theory and Method of Global and Regional Gravity Field

山东大学出版社



责任策划　张申华
责任编辑　李云霄
封面设计　张荔


ISBN 978-7-5607-5320-1

定价：28.00元

全球与区域重力场逼近理论方法

宋雷　著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全球与区域重力场逼近理论方法/宋雷著.一济南:山东大学出版社,2015.7

ISBN 978-7-5607-5320-1

Ⅰ.①全…　Ⅱ.①宋…　Ⅲ.①地球重力场一研究
Ⅳ.①P312.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 174128 号

责任策划:张申华
责任编辑:李云霄
封面设计:张　荔

出版发行:山东大学出版社

社　址　山东省济南市山大南路 20 号
邮　编　250100
电　话　市场部(0531)88364466

经　销:山东省新华书店
印　刷:山东省英华印刷厂
规　格:880 毫米×1230 毫米　1/32
6 印张　161 千字
版　次:2015 年 7 月第 1 版
印　次:2015 年 7 月第 1 次印刷
定　价:28.00 元

前 言

随着现代科学技术的发展，研究和确定地球重力场的精细结构在现代大地测量学领域中上升到了一个突出的地位。精确地逼近地球重力场和(似)大地水准面始终是物理大地测量学要解决的主要问题。确定地球重力场，主要是建立地球重力场位模型和确定(似)大地水准面，这两项任务紧密相关。地球重力场模型可为大地测量学、地球物理学、地球动力学和地震学等地球学科的研究提供基础性信息。精化区域(似)大地水准面也是一个国家和地区建立现代高程基准的主要任务。利用卫星观测信息研究地球重力场是大地测量学科继 GPS 技术之后又一革命性的发展。在工程应用方面，高精度、高分辨率区域(似)大地水准面模型结合 GPS 技术，可以取代传统的水准测量方法测定正高或正常高。

本书主要针对地球重力场逼近理论和方法及其工程应用进行研究，包含作者多年的研究成果，主要内容包括：

(1)利用能量守恒方法由 CHAMP 卫星精密星历和加速度数据恢复地球重力场模型，并将这些模型与 EGM96 重力场模型和 GFZ 公布的 EIGEN-CG01C 重力场模型进行比较，验证了 CHAMP 卫星对地球中、长波重力场的敏感性。

(2)山东省及邻近区域重力(似)大地水准面的计算方案；利用移去-恢复技术建立了山东省及邻近区域重力(似)大地水准面模型；利用新的拟合方法得到山东省区域内似大地水准面结果的内、外符合精度均优于 10.0 厘米。

(3)地球重力场模型和区域似大地水准面的工程应用方面，主要研究了利用地球重力场模型提高山区GPS高程转换精度；全球重力场模型和GPS/水准数据确定工程区域似大地水准面；利用二次平差法建立GPS平面和高程一体工程控制网；GPS平面和高程一体工程控制网在水利工程中的应用等内容。

在本书的研究过程中，得到中国科学院上海天文台吴斌研究员和周旭华研究员、东南大学交通学院胡伍生教授等专家学者的指导和帮助，在此表示感谢。本书的出版得到了交通运输部应用基础研究项目"高精度GPS高程测量及高海拔地区交通工程应用研究"(2013319817120)、中国科学院科研项目"北斗精密单点定位算法研究"、山东交通学院科研项目培育基金等项目资助。

由于作者水平所限，研究内容难免出现问题和错误，不当之处，希望得到各位专家学者的指正。

作者

2015年6月18日

目 录



第1章 绪 论

1.1 引言

现代科学技术的发展将大地测量学推进到一个崭新的发展阶段,大地测量学的理论和技术体系及其内涵都发生了很大的变化,研究和确定地球重力场的精细结构在现代大地测量领域中上升到突出地位。卫星大地测量学的出现使大地测量定位基准从常规的静态基准(大地控制网)发展到地球外空间的动态基准(卫星在全球地心坐标系中的轨道位置)。卫星地面定位的精度取决于卫星精密定轨的精度,实现卫星精密定轨的一个基本条件是精密的全球重力场模型,地球重力场信息在卫星大地测量定位中间接地起到关键作用。利用地球重力场可以推测地表以下物质结构的丰富内涵;掌握重力场的精细结构,可以精确计算重力场对空间飞行器轨道的影响;卫星轨道的精确计算和预报也需要重力场资料。事实上,地球重力场的模型已成为大地测量学、地质学、地震学、地球动力学、海洋学、空间技术和军事应用等学科和领域共同需求的基础性资料。在以基础地学研究为主的现代大地测量整体框架中,研究地球重力场的物理大地测量学和空间大地测量学将相互紧密结合组成大地测量学科的支柱。

地球重力学和其他相关学科一起,构成了现代大地测量学科体系的基础。地球重力场是一种空间分布的物理场,地球重力场及其时变反映了地球表层和内部的密度分布和物质运动状态,同时决定

着大地水准面的起伏变化。从地球重力场的信息中可以推算地球这一不规则椭球体的形状，可以反演地球内部物质的分布状况，地球重力场的变化约束和影响着一切物体在空中飞行的状态和轨迹。而精确地掌握地球重力场的状况和规律却是一件复杂而艰巨的工作。地球重力场逼近理论和方法是物理大地测量学的核心问题，根据研究的区域和范围，可分为全球重力场逼近和局部重力场逼近。全球重力场逼近主要是恢复地球重力场位系数模型，局部重力场逼近以确定区域性高精度、高分辨率的(似)大地水准面模型为主要研究内容。这两项任务是紧密相关的，理论上都归结为求解大地测量边值问题。

地球可视为由无数质点组成的质体，地球的引力是组成地球的所有质点的引力的合力。同时，地球在做永不停息的自转运动，因而存在于地球上的所有物体也随之绕地轴转动。在地球参考系内，这些物体又要受到一个离心力的作用，地球的重力就是单位质点所受到的地球引力和离心力的合力。地球外部空间每一点都有一个确定的重力值与之对应，我们就说地球外部空间存在重力场，当将质量置于地球重力场中，就会受到地球的重力的作用。地球重力场是一种客观存在。广义的地球重力场模型包括利用重力观测数据建立的各种模型，如数值模型、图像模型、函数模型。函数模型是指重力位的函数系数的集合，又称为“位系数模型”。位系数模型是地球重力场的数学拟合和逼近，在理论和实际中便于数值化的应用。位系数模型的一种常用形式是球函数模型。

地球重力场的研究可以追溯到牛顿时期。牛顿根据他所发现的万有引力和地球自转运动得出地球近似于两极稍扁、赤道隆起的旋转椭球。这一形状对应于地球重力场球函数展开式的 J_2 阶系数，该系数比其他各阶系数约大三个数量级以上。在此后的数百年中，在以 Stokes、Molodensky、Bjerhammar、Krarup 和 Moritz 等为代表的科学家的辛勤努力下，这一学科不断得到发展和完善。其中最具代表性的是 Stokes(斯托克司)理论和 Molodensky(莫洛金斯基)理论，这两个理论奠定了近代地球重力学科研究的基础。Stokes 理论



和 Molodensky 理论都要求覆盖全球的重力资料，由于政治、经济和技术条件的限制，用地面观测方法获取全球重力资料是很困难的。1961 年，Izsak 分析卫星观测数据确定了到 2 阶的非带谐系数，开创了利用卫星观测确定地球重力场模型的先河。结合卫星和地面重力数据建立地球重力场模型的创始人是 Kaula 教授，他于 1966 年首次综合利用卫星轨道摄动分析和地面重力测量资料计算了一个 12 阶的地球重力场位系数模型，并出版了《卫星大地测量学》一书，引起极大的反响，奠定了卫星重力学的基础。近几十年来，地球重力场模型的种类、精度和分辨率都在不断增加和提高。利用人造卫星作为传感器采集全球重力场信息主要有四种观测模式，即：地面站跟踪观测卫星轨道、卫星测高、卫星跟踪卫星（卫-卫跟踪、SST）和卫星重力梯度测量（SGG）。相应于卫星观测数据的重力场研究和计算的方法主要有时域法和空域法。时域法以卫星运动方程为基础，将卫星的轨道摄动观测值直接表示成重力位球函数展开式系数的函数，由最小二乘法或正则化算法直接求解位系数。空域法是利用卫星跟踪数据导出在卫星高度处的扰动重力或重力异常观测值，将它们在以卫星平均轨道高度为半径的球面上进行格网化处理，将问题转化为某个类型的边值问题的解，可大大减轻计算量。

早在 20 世纪 70 年代初期，利用卫星观测技术和星载重力仪研究地球重力场的概念就已经提出。进入 80 年代，许多学者开始对不同的专用重力卫星观测方案进行数值模拟研究，同时专用于重力观测的卫星系统设计和实验也逐步开始。经过几十年的反复论证和实验，最终卫星跟踪卫星和卫星重力梯度测量两种观测模式被国际大地测量界普遍接受。为了提高重力场模型的精度并确定其随时间的变化，欧洲和美国相继发射或即将发射重力小卫星，其中具有代表性的是 CHAMP、GRACE 和 GOCE 三颗重力卫星，它们分别采用 HL-SST（高低卫-卫跟踪）、LL-SST（低低卫-卫跟踪）和 SGG（卫星重力梯度测量）三种卫星观测模式。卫星重力探测技术及专用于重力计划的卫星的发射将大大提高我们对地球重力场的认识，特别是

CHAMP、GRACE 和 GOCE 三颗新一代重力卫星计划将给我们提供更加丰富的地球重力场信息，填补地球上的重力空白区，获得更为精细的重力场模型结构，其中地球重力场的长波部分将得到很大的改善，甚至有望改善短波部分。

区域重力场逼近的目的是确定区域性高精度、高分辨率的(似)大地水准面模型。申文斌曾从理论上对大地水准面的各种定义进行比较，指出了大地水准面经典定义的局限性，证明了地球重力等位面的存在性与适用范围，提出了等频大地水准面的概念(等频大地水准面是最接近于平均海水面的封闭曲面，在其上的任意两点之间不存在重力频移)。他还指出在厘米级精度要求之下，无需考虑等频大地水准面与经典大地水准面的区别，对于更高精度要求的大地水准面，就有必要考虑上述两种水准面的差异。

从经典意义上来说，大地水准面可以定义为与全球无潮平均海水面密合的重力等位面，并用这个面相对一个参考椭球面的大地水准面的高描述它的起伏。图 1-1 为利用 EGM96 重力场模型计算的全球大地水准面异常图，全球大地水准面相对于椭球面的起伏约为 −105.9～83.7 m。

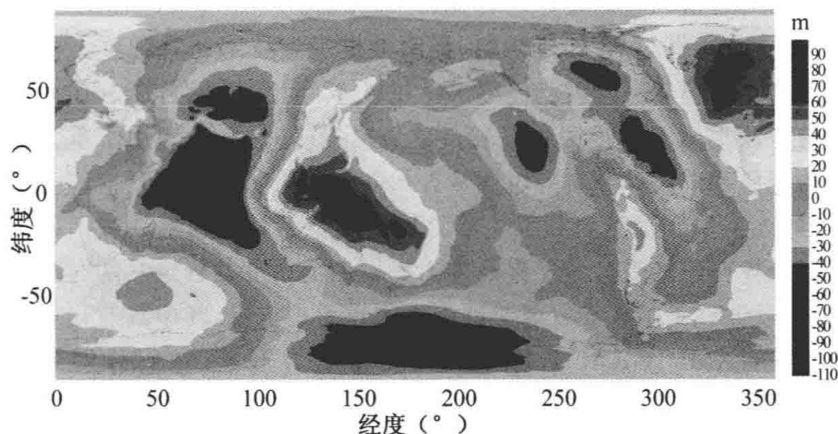


图 1-1　利用 EGM96 重力场模型计算的全球大地水准面异常图



在工程应用中,我国以正常高作为法定高程系统,正常高是以似大地水准面为基准定义的高程系统。似大地水准面没有明显的物理意义,大地水准面和似大地水准面在海洋面上是重合的,平原地区相差几个厘米,两面在全球理论上最大相差可达 3 米多(青藏高原地区)。

1849 年,英国数学家 Stokes 在前人研究的基础上发展和完善了地球形状理论,建立了著名的 Stokes 定理,并按球近似解算了物理大地测量边值问题。自此以后,大地测量边值问题得到发展。特别是几十年来,人们一直试图得到在数学上严密、在物理上完善、符合现实情况的解。随着卫星重力探测技术的研究和实施,卫星对地探测数据正在提供越来越多的新型重力场信息源,包括海洋卫星测高数据、卫星轨道摄动跟踪数据、卫-卫跟踪数据和卫星重力梯度数据。新型数据和新的数据组成结构提出新的边值问题,比较有代表性的有混合边值问题和超定边值问题。国内学者李斐和张利明等针对 GPS/重力边值问题进行了深入研究,在理论研究和实际应用方面有许多新的发展。在大地测量边值问题经典方法不断得到改进的同时又出现许多新的理论和方法。

1.2 地球重力场模型研究发展与现状

1.2.1 地球重力场理论与技术发展背景

精密的全球重力场模型可为相关地球学科(如地球物理学、大地构造学、地球动力学和地震学等)研究地球内部结构和动力学过程提供基础信息。精细的重力异常分布和大地水准面起伏对于岩石圈和地幔动力学研究中的系列问题也有很重要的作用。利用卫星测高数据确定的高分辨率全球海洋大地水准面研究海底及其深部构造取得了瞩目成果。海洋大地水准面是反映海底地形起伏以及海底大地构造的物理面,洋中脊、海沟、海山和海底断裂带都可以经过频谱分析

从海洋大地水准面起伏图像中识别，准确地测定海面地形、海洋环流、海底构造和监测海平面变化都对海洋重力场和海洋大地水准面的精度和分辨率有很高的要求。表1-1给出了不同科学领域对地球重力场的精度和空间分辨率的基本要求。

表1-1　不同科学领域对地球重力场的精度和空间分辨率的基本要求

科学领域		大地水准面(cm)	重力异常(mGal)	空间分辨率(半波长,km)
海洋学	短尺度海面地形	1	1～5	100
	海盆尺度海面地形	0.1	1～5	1000
地幔和地壳	地幔对流	10	1	200
	地幔柱	10	1	50
	海洋岩流圈	10	1	100
大地测量	GPS/水准	1	1～5	100
	高程基准统一	1	1～5	100～20000
	低轨卫星定轨		0.01	200

全球重力场模型研究方面，早期的静态地球重力场模型主要是利用地面卫星跟踪资料获取地球重力场的长波部分，利用地面重力观测和卫星测高资料等获取地球重力场的中、短波长部分。近几十年来有关地球重力场的研究表明，经典模式恢复地球重力场，其静态部分无论是在空间分辨还是在精度上都难以有明显改善。这就导致了卫星重力学的兴起。随着空间技术的发展，实施专用的重力卫星技术已成为可能。通过重力卫星的观测数据，不仅可以得到高精度的静态地球重力场模型，还可以得到地球重力场时变信息。随着卫星重力技术与地球物理学、大地测量学和空间科学等学科的相互渗透，它在地学学科中的影响将是深远的。

局部地球重力场逼近研究方面，大地水准面和似大地水准面都



是大地测量定义高程系统的基准面，许许多多与地理位置相关的空间数据或空间信息都需要以大地水准面或似大地水准面为起算面的正(常)高系统。全球定位系统(GPS)的出现，极大地改变了传统的测绘方式，GPS 定位技术能够在 10^{-6}～10^{-8} 的量级精度上获得所测点位的三维相对坐标，但其获得的高程信息是相对于 WGS-84 椭球的大地高，而工程应用中的法定高程系统是以(似)大地水准面为基准的正(常)高。将 GPS 大地高转换为正(常)高，是 GPS 应用领域的一个研究热点。高精度、高分辨率的(似)大地水准面数值模型，可以给出任一点的(似)大地水准面高，作为测定正(常)高的参考框架。随着 GPS 技术在测绘领域的广泛应用，对高精度、高分辨率(似)大地水准面的要求也越来越迫切。GPS 技术结合高精度、高分辨率(似)大地水准面模型可以取代传统的水准测量方法测定正(常)高，真正实现 GPS 技术在几何和物理意义上的三维定位功能。因此，在当今 GPS 定位时代，精化区域(似)大地水准面和建立新一代传统的国家或区域高程控制网同等重要，也是一个国家或地区建立现代高程基准的主要任务。21 世纪，大地测量学家提出确定具有厘米级精度大地水准面的任务。对于一个国家来说，在领土范围内建立高精度、高分辨率(似)大地水准面也是发展一个国家测绘事业的基础性建设工程，以此满足国家经济建设和测绘科学技术的发展以及相关地学研究的需要。

计算技术的发展和全球定位系统 GPS 的出现，为区域似大地水准面确定提供了新的计算方法和检测手段。人工神经网络作为一门新兴的交叉学科，在许多工程领域的应用研究都取得突破性进展。测绘界不少学者系统研究了应用人工神经网络进行 GPS 高程转换，取得一些有益的结论。国内学者胡伍生博士基于对神经网络模型的深刻理解，创新性地提出转换 GPS 高程的“混合转换法”，大大提高了 GPS 高程转换结果的精度。在区域似大地水准面确定方面，利用人工神经网络方法的最新成果进行重力似大地水准面和 GPS/水准似大地水准面的拟合，应该是一个值得关注的研究方向。

虽然我国在地球重力场理论、技术和方法以及应用的研究取得了大量的成果，其中有许多研究是跟踪国际前沿的，但同国外研究工作相比还存在不小的差距，我国在卫星重力探测技术方面也与发达国家相距较远。区域地球重力场(大地水准面精化)的研究也任重道远。结合我国发展重力卫星的紧迫性和我国局部重力场有待进一步精化的现实性，展开地球重力场方面的研究，无论对缩小与世界先进水平的差距还是对促进我国测绘事业的发展，都具有深远的现实意义。

1.2.2 地球重力场模型研究回顾

1952年，Zhongolovich根据10°×10°的地面重力资料计算了地球重力位的8阶球谐系数，这是地球重力场模型研究的开端。1957年，世界上第一颗人造卫星发射，卫星的观测数据被用于确定重力场模型的位系数。1959年O'Keefe和Squire等人估算到了4阶的偶次项带谐系数。1961年Izsak分析卫星观测数据确定了直到2阶的非带谐系数，拉开了利用卫星观测技术确定地球重力场模型的序幕。此后，国内外不同的研究机构推出了多种序列的地球重力场模型，其中有代表性的有：美国国家航空航天局哥达德宇航中心(NASA GSFC)的GEM系列模型；Ohio大学的OSU系列模型；美国宇航局和美国国防制图局的EGM96模型；中国科学院测量与地球物理研究所的IGG系列模型；西安测绘研究所的DQM系列模型；武汉大学(原武汉测绘科技大学)的WDM系列模型等。

随着CHAMP和GRACE卫星的发射，国内外许多科研机构针对CHAMP和GRACE重力场的恢复展开了卓有成效的研究，并推出一系列新的卫星重力场模型。其中有代表性的有：(1)德国地球科学中心(GFZ)推出的EIGEN-1S、EIGEN-2、EIGEN-3p和EIGEN-GRACE01S模型。其中，EIGEN-1S是GFZ利用88天的CHAMP数据计算得到的，模型阶次为119，在半波长为550 km的分辨率下，重力异常的精度优于2.5 mGal。EIGEN-2模型是利用6个月的



CHAMP 卫星数据计算得到的，模型阶次为 140，在半波长为550 km 的分辨率下，重力异常的精度优于 0.5 mGal，大地水准面精度优于 10 cm。EIGEN-3p 模型是利用三年的 CHAMP 数据计算得到的。而 EIGEN-GRACE01S 模型是第一个综合 CHAMP 和 GRACE 数据计算的重力场模型。(2)德国慕尼黑大学推出 TUM-1S、TUM-2Sp 模型。其中，TUM-1S 是利用近半年的 CHAMP 几何法轨道基于能量守恒方法得到的，而 TUM-2Sp 模型是利用一年的几何法轨道计算得到的，这两个模型都完全至 90 阶次。(3)丹麦哥本哈根大学的 Tscherning 教授领导的课题组推出的 UCPH2002_04、UCPH2003_02 UCPH2003_03 模型。其中，UCPH2002_04 是利用一个月的 CHAMP 快速科学轨道、UCPH2003_02 UCPH2003_03 模型采用 DEOS 中心提供的轨道计算得到，计算方法是先采用能量守恒方法获得卫星高度处的扰动位，然后根据最小二乘配置方法得到。上述三组模型的阶次都为 90。(4)美国 Ohio 大学推出的 OSU02A 和 OSU03A 模型。这两组模型都是利用 GFZ 提供的快速科学轨道计算得到的，前者恢复至 50 阶次，后者恢复至 90 阶次。(5)我国西安测绘研究所于 2004 年基于能量守恒方法利用三个不同时期的 CHAMP 卫星快速科学轨道数据和加速度数据推出的 XISM01、XISM02 和 XISM03 模型。三个模型都完全至 50 阶次。表 1-2 列举了部分地球重力场模型。

表 1-2　　地球重力场模型

模型名称	时间	研究机构	最高阶次	所用数据资料
OSU89A	1989	美国 Ohio 大学	360	GEMT2 模型、地面重力、海洋测高
WDM94	1994	武汉大学	360	卫星跟踪、地面重力
EGM96	1996	美国国家航空航天局(NASA)	360	卫星跟踪、地面重力、海洋测高
EIGEN-2	2003	德国地球科学中心(GFZ)	140	CHAMP 卫星数据
IGG-GRACE01S	2005	中科院测量与地球物理地所(IGG)	80	GRACE 卫星数据
EGM2008	2008	美国国家地理空间情报局(NGA)	2190	GRACE 卫星数据、地面重力、海洋测高
GO_CONS_GCF_2_TIM_R5	2014	欧洲空间局(ESA)	280	GOCE 卫星数据
EIGEN-6C4	2014	德国地球科学中心(GFZ)	2190	GOCE 和 GRACE 卫星、激光测距等

近几年来，人们掌握的与地球重力场有关的信息越来越丰富，多种重力探测技术，特别是卫星重力探测计划的实施，大大推进了重力场模型在精度和分辨率上的提高，也导致模型的研究进展加快，模型更新周期变短。

1.2.3　重力卫星技术的发展

研究表明，经典模式恢复地球重力场，其静态部分无论是在空间



分辨还是在精度上都难以有明显改善；而且，由于大气对低轨卫星定轨的影响，重力场的时变部分的精度也难以有所突破。所有这些局限都要求在地球重力场的研究方面寻求更有效的途径，这就促使了卫星重力学的兴起。CHAMP、GRACE 和 GOCE 重力卫星的发射，开创了卫星探测地球重力技术的先河。

尽管卫星重力学的概念及其预研开始较早，其可行性和前景也非常明确，但由于空间技术的复杂性以及高精度卫-卫跟踪仪器和重力梯度仪研究的困难，国际上重力专用卫星计划及其实施历经坎坷。2000 年 7 月 15 日，由德国地球科学中心(GFZ)独立研究也是世界上首次采用卫-卫跟踪技术的重力卫星 CHAMP 成功发射，迈出了卫星重力学研究的重要一步。

应用地面站卫星跟踪数据探测重力场可追溯到 1958 年。Buchar 根据 Sputnik 卫星的近地点运动在忽略高阶带谐系数条件下首次估计了地球扁率系数 C_{20}。然而，由于观测精度低和卫星轨道太高及不能全球覆盖等因素的限制，求得的位系数的阶次和精度都受到影响。随着卫星技术的发展，利用卫星技术推求重力场模型取得飞速发展，主要体现在以下三个方面：

(1)通过采用 LAGEOS 卫星高精度 SLR 数据，有效地提高了低阶次位系数的精度。

(2)利用 30 多颗不同轨道倾角的卫星，大大改善了观测数据的覆盖。

(3)采用低轨道的卫星，如 GEOSAT、ERS 卫星，使重力场信息的分辨率大大提高。利用地面站卫星跟踪数据先后求得了 36 阶、50 阶和 70 阶的卫星重力场模型。

卫星测高是随着卫星遥感测量技术发展起来的新型边缘学科，其研究对象是占全球总面积约 70% 的海洋。海洋卫星测高数据为海区地球重力场的研究提供了高分辨率的资料，可以说目前高分辨率的全球重力场的计算离不开卫星测高数据。尽管卫星测高(如 T/P卫星)可获得精度优于 5 cm 的海面高度，但由于卫星测得的海

面高度由大地水准面和海面地形两部分组成，海面地形的波长与大地水准面的中波波长相当，测高数据很难分离这两种高度。因此，卫星测高数据获得的大地水准面和海面地形最多只有亚米级的精度。分米级甚至厘米级精度的地球重力场模型只能靠专用低轨卫星的卫-卫跟踪和卫星重力梯度测量(SGG)的观测数据，这就是相继发射CHAMP、GRACE 和 GOCE 等专用于重力计划卫星的原因。卫星测高是几何测量，卫星重力测量是物理测量，大地水准面的起伏既是地球形状的表现，也是地球物理性质的表现。如果海洋是静止的，海平面和大地水准面重合，卫星测高和卫星重力测量就会得出一致的结果。但是由于海洋的动态变化，卫星测高只能给出海洋面的形状，并不是大地水准面。所以卫星测高和卫星重力测量都是必要的，并且只有这两种测量模式的结合才是实用的、科学的和完美的。

卫星跟踪卫星的形式有两种，一种是由几颗高轨道上的卫星跟踪一颗低轨道卫星，称为“高低卫-卫跟踪”(HL-SST)；另一种是在近于相同轨道上运行相距数百千米的两颗卫星之间的连续跟踪，称为“低低卫-卫跟踪”(LL-SST)。SST 的优点在于：

(1)卫星之间可以连续跟踪，避免了对流层折射的影响。

(2)卫星间的距离变化率对地球重力场的细部结构很敏感。

(3)卫星轨迹可以很好地覆盖全球，便于高精度地恢复地球重力场。

在大地测量方面，SST 最重要的用途是测定地球重力场，由于激光测卫技术的改进，已经对地球重力场的长波长特征获得了很好的认识。但是对于地球物理学、海洋学和大地测量学等许多学科领域的研究来说，则需要有分辨率为 200～250 km，精度达到±5～1 mGal的全球重力场和厘米级的大地水准面。地面和常规的卫星方法，不会有重大的改进，SST 技术就是为实现上述目标开辟出的一条新的途径。

卫星重力梯度测量(SGG)是在低轨道卫星上装载高精度的超导重力梯度仪，测量空间在轨卫星处的重力位的二次梯度，习惯称之为“重力梯度张量”。重力梯度张量反映了重力位水准面的曲率和力



线弯曲，因而重力梯度张量更能反映重力场的细部结构，对重力场的短波变化更敏感，有能力恢复地球重力场的高阶部分，这就是重力梯度测量的优势。早在 20 世纪 70 年代末，美国宇航局(NASA)提出了 SGG 的长期重力场飞行计划(Gravity B)，其最终目的是通过高精度的轨道重力梯度测量获得空间分辨率达到 25 km、精度为 1 mGal 的全球重力场。在该计划的支持下，美国和西欧的许多科研机构对适于地球卫星轨道上使用的梯度仪及飞行器的设计、研制和试验进行了卓有成效的研究。欧空局于 2009 年发射的 GOCE 卫星就是最新的 SGG 技术测定地球重力场计划。

对于长波长重力场来说，高低卫-卫跟踪(HL-SST)、低低卫-卫跟踪(LL-SST)和卫星重力梯度测量(SGG)的预期精度都好于 360 阶次 EGM96 模型。对于中波长重力场，低低卫-卫跟踪(LL-SST)和卫星重力梯度测量(SGG)的预期精度也远好于 EGM96 模型。只是在短波长重力场上，卫星重力技术将不再有优势。

CHAMP(Challenging Mini-Satellite Payload)卫星是由德国地球科学中心(GFZ)研制的首次采用卫-卫跟踪技术(HL-SST)的重力卫星，于 2000 年 7 月 15 日成功发射，CHAMP 卫星是一颗低轨道、近极卫星，低轨道保证了它对地球重力场有高的敏感性，而近极轨道可以对全球进行连续的覆盖扫描。CHAMP 卫星在地球重力学研究方面的主要目的是确定全球中、长波长静态重力场及其时变。CHAMP 卫星上搭载有两个重要设备——星载双频 GPS 接收机和放置于整个卫星系统重心处的三轴加速度计。其中，星载双频 GPS 接收机接收高轨 GPS 卫星信号，用于精密地确定 CHAMP 卫星的轨道；放置于整个卫星系统重心处的三轴加速度计，用以直接测定卫星的非保守力摄动。CHAMP 卫星反演地球重力场的空间分辨率可达到 500 km，即 1000 km波长以上中波长大地水准面测定精度可达到 1 cm。图 1-2 为 CHAMP 重力探测示意图。

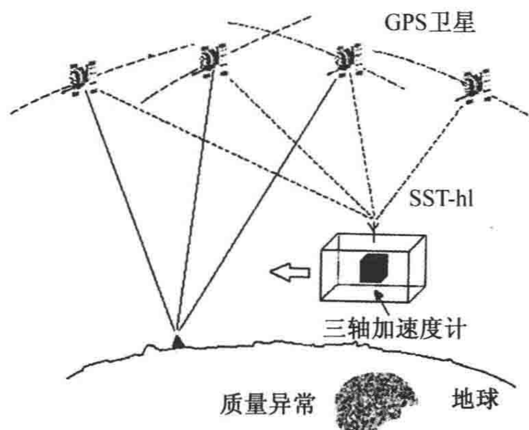


图 1-2　CHAMP 重力探测示意图

GRACE(Gravity Recovery and Climate Experiment)卫星是美国国家航空航天局和欧洲联合研制的重力卫星，已于 2002 年 3 月成功发射。GRACE 卫星采用低-低卫星跟踪(LL-SST)技术，即在同一轨道上发射两颗相距约 200 km 的低轨道卫星，卫星轨道高度为 300～480 km。GRACE 卫星的主要星载设备有 GPS 接收机、加速度计和高精度的微波测量装置。GPS 接收机用于卫星的精密轨道确定；加速度计用于测定卫星受到的非保守力；微波测量装置测定两卫星间的距离和距离变率，即 LL-SST 观测值，距离变率的测定精度可以达到 1 μm/s，通过 LL-SST 观测值可以探测出重力场的变化信息。这种技术既包含了两组高低卫-卫跟踪，还利用差分原理测定两个低轨卫星的相对运动，其反演地球重力场的精度较 CHAMP 卫星有大大的提高。GRACE 卫星 5 年运行期的数据可以求得大地水准面的年、月变化，预计测定中长波长地球重力场 5000 km 波长大地水准面的精度达到 0.001 mm，500 km 波长大地水准面精度可以达到 0.01 mm，大地水准面的年变化的测定精度为 0.01 mm。GRACE 卫星数据反映的大地水准面的变化为地球物理、海洋科学和大地测量等学科科学研究提供了重要的基础数据。图 1-3 为 GRACE 重力探测示意图。

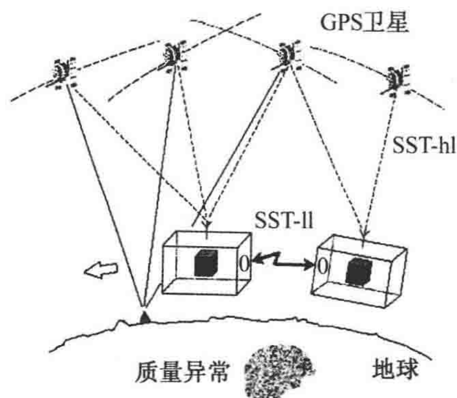


图 1-3 GRACE 重力探测示意图

GOCE(Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation)卫星是欧洲空间局经过 10 多年研究确定的探测高精度、高分辨率地球重力场的研究计划，于 2009 年发射，GOCE 卫星星载的主要设备有 GPS/GLONASS 组合接收机、三轴重力梯度仪以及姿态控制系统。GOCE 卫星的飞行高度约为 260 km，轨道倾角为 96.5°，该轨道的优点是太阳的光照总是在同一个方向，缺点是测不到极点地区附近的数据，该部分的数据缺口由 CHAMP 或 GRACE 卫星的数据补充，也可以用极点地区的航空重力数据补充。GPS/GLONASS 组合接收机的卫星轨道跟踪数据提供低频部分的重力场观测值，重力梯度仪测量中高频的重力场数据，GOCE 卫星的数据可计算直至 200 阶的重力场模型，相应的分辨率为 100 km，重力异常的精度优于 2 mGal，大地水准面的精度优于 5 cm。图 1-4 为 GOCE 重力探测示意图。

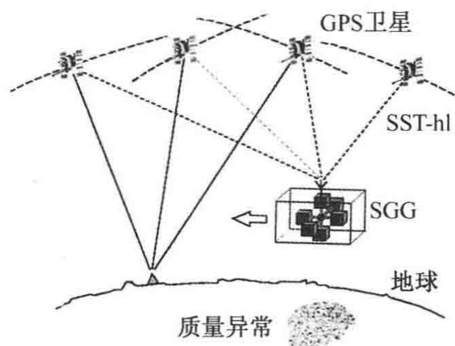


图 1-4　GOCE 重力探测示意图

1.2.4　时变重力场

重力场的时间变化可分为潮汐变化和非潮汐变化。潮汐变化源于日、月潮汐力的作用。非潮汐变化反映了固体地球(岩石圈和地幔)与地球物理流体(大气、海洋和液体外核等)的相互作用。随着空间对地观测技术的发展,地球重力场时变信号的探测可揭示地球质量分布的变化。反映地球质量分布变化的地球重力场的时变性得到国际大地测量和地球物理联合会(IUGG)的高度重视。随着 CHAMP、GRACE 和 GOCE 计划的实施,地球重力场的时变性得到更深入的研究,有力地推动了固体地球物理、海洋物理、气候学以及大地测量等学科的发展。

CHAMP 卫星、GRACE 卫星、GOCE 卫星计划是卫星重力研究计划的一个整体系列,它们彼此互补并具有不同的科学应用。



1.3 局部重力场逼近理论研究发展与现状

1.3.1 大地测量边值问题研究进展

大地测量边值问题是物理大地测量学的主要理论支柱，是研究地球重力场的理论基础，也是局部重力场逼近的基本理论。1837年，Listing首次引进了地球形状的概念——大地水准面。大地水准面被定义为与全球无潮平均海水面密合的重力等位面，大地水准面并不是一个旋转椭球体，它相对于平均地球椭球有着100米左右的起伏，并且两者的法线也不重合，所以大地水准面是一个较复杂的曲面。

英国数学家Stokes为研究和确定大地水准面作出了巨大的贡献，他于1849年建立了著名的Stokes定理：如果一个包含着全部物质的水准面形状是已知的，又已知物质的总质量以及它围绕着某一固定轴旋转的角速度，则可以唯一地确定该水准面上及其外部空间任一点的重力值。以大地水准面为边界面的Stokes问题第一次提出大地测量边值问题，并导出Stokes公式。正是因为将大地水准面作为边界面，才给Stokes问题带来了不可避免的理论缺陷，直到现在还没有一种排除大地水准面外部质量对地球重力场不产生影响的归算方法。尽管如此，这种缺陷带来的误差在经典大地测量精度要求范围内一般是容许的，Stokes方法仍将保留它很强的理论研究价值和应用价值。

1945年，Molodensky对Stokes问题作了重大修改，提出直接使用不加归算的地面重力观测值（重力向量和重力位）同时确定地球表面及其外部位，由此产生了Molodensky边值问题。正常高、高程异常和似大地水准面是Molodensky理论中的概念，理论上Molodensky边值问题是非线性自由边值问题（边界面是未知的），从确定地球真正（自然）形状出发，引入似地形表面的概念，以似地形表面为边

界面,直接以地面重力异常为边值确定高程异常,不需要重力归算和调整地壳质量,避开了对地壳密度的假设。它从根本上克服了Stokes方法需要对大地水准面外部的质量进行归算的缺陷,这一理论近乎完美,但其代价是“丢失”了大地水准面这一具有重要地球物理意义的物理面,而似大地水准面又无明显的物理意义。Molodensky问题与Stokes问题解的数学结构有密切的联系,在球面边界近似情况下,当仅顾及零阶项和一阶项时,高程异常的计算公式可简化为Stokes公式。

继Molodensky问题之后出现的Hotine边值问题和Bjerhammar虚拟界面边值问题也是重力场逼近中常用的方法。

1.3.2 国外大地水准面精化的概况

大地水准面的巨大应用和科学价值是其迅速发展的推动力,20世纪90年代以来,世界各国和地区的大地水准面精化有了很大的发展,分辨率和精度水平都有很大提高。尤其是近几年,由于重力数据积累增多、数字地形模型DTM的建立以及重力位系数模型的分辨率和精度有显著的提高,使确定高精度、高分辨率的重力大地水准面成为可能,GPS/水准的出现对结果的精度评定也提供了一个可靠的外部检核标准。

整个欧洲地区大地水准面的计算始于20世纪80年代初期,第一代欧洲重力大地水准面EGG1和EAGG1的精度为几分米,分辨率为20 km,其中,EAGG1比EGG1精度略优。Denker、Behrend、Torge(1993)利用高精度的重力和地形资料解算了欧洲新的大地水准面模型EGG2,与GPS/水准测量数据对比的结果表明,在100～3000 km距离的精度在±4～±16 cm。从1994年开始,先后推出EGG94、EGG95、EGG96和EGG97系列欧洲重力似大地水准面。EGG97以1.0′×1.5′格网表示,分别与德国的GPS网、法国的GPS网以及横贯欧洲的GPS导线进行比较,结果表明中、长波系统误差为±8.0 cm,短波误差信号为±1.3 cm。



美国在20世纪90年代前期先后推出了GEOID90、GEOID93和G9501区域大地水准面模型，三个模型的计算方法基本相同，并由G9501校正得到G9501C模型，G9501C模型的精度为±2.6 cm。90年代中后期，美国对精化其局部大地水准面作了进一步的努力，主要是大力扩展GPS/水准网，提高其分辨率和精度，并推出GE-OID96大地水准面(2.0′×2.0′)模型和重力大地水准面G96SSS模型。GEOID99分辨率提高到1.0′×1.0′，重力大地水准面G99SSS的计算过程中所的利用重力数据也有所增加，DTM也有所改进，计算方法上也采取了一些严密化的措施。GEOID99的精度为±2.0～±2.5 cm，由GPS椭球高转换为正高的精度为±4.6 cm，任意两点高差的精度为±2.0 cm。最新的重力大地水准面模型USGG2003和大地水准面模型GEOID03构建过程中更新了深海重力异常数据，GPS/水准点的空间覆盖也有所增加，并利用了加拿大境内的部分GPS/水准点以提高北部边界的模型精度。

加拿大、英国、德国、日本和奥地利等国家和地区也相继推出各自的区域大地水准面模型，并在一些地区取得振奋人心的成果。比如，日本最新的重力大地水准面JGEOID2000与遍布全国的GPS/水准网利用最小二乘配置法拟合，形成日本混合大地水准面模型GSIGEO2000，内符合精度为±4.0 cm，外符合精度为±4.5～±5.4 cm。英国在90年代初期利用点间距约2 km的重力异常数据以最小二乘配置法计算的大地水准面与GPS/水准比较，平均不符值为5 mm，最大不符值为6 cm，利用GPS结合精密大地水准面测定正高，基本上可以满足英国三等水准测量的标准，甚至在不少地区可以满足二等水准测量的要求。现在各国正在考虑运用新一代卫星重力计划CHAMP、GRACE和GOCE，进一步改进大地水准面使其达到传统水准测量的精度。

目前各国在计算大地水准面的步骤上多采用“移去-恢复”方法，地形变化大的地区还顾及到地形改正和均衡改正的影响，在计算方法上为加快计算速度，一般采用快速Fourier变换(FFT)和最小二

乘配置方法(LSC),也有学者采用改化的 Stokes 方法。

1.3.3 我国的(似)大地水准面精化

我国的似大地水准面工作从 20 世纪 50 年代末期开始,70 年代初取得初步成果,依靠天文重力水准方法,建立了我国 1954 北京坐标系的第一代似大地水准面 CLQG60(Chinese Local Quasi Geiod 1960),总体分辨率为 200～500 km,精度为 2～4 m。为以后我国进一步发展新一代似大地水准面积累了技术基础。20 世纪 90 年代初又将这一似大地水准面转换到新建立的我国 1980 西安大地坐标系,称为 CQG80。20 世纪 90 年代初,国家测绘局利用包括我国重力数据在内的 $30'\times30'$平均空间重力异常,研制成功 WDM94(360 阶)全球重力场模型,同时利用全国约 22 万个重力点值以及 $30''\times30''$ DTM 和 WDM94 模型,计算了 $5'\times5'$中国大地水准面模型 WZD94,重力大地水准面 WZD94 仅是一个实验性研究成果。我国新一代似大地水准面数值模型(CQG2000)是国家测绘局建立的能直接用于测绘生产并完全覆盖我国国土(包括海域区)的中国似大地水准面。CQG2000 分三步完成:一是我国大陆大地水准面的研究和计算;二是我国海域大地水准面的研究和计算;三是我国大陆和海域两个大地水准面的拼接研究和计算。CQG2000 的分辨率为 $15'\times15'$,与地壳运动观测网络工程 GPS/水准点比较,高差最大值为 0.998 m,最小为−0.901 m,平均为 0.009 m,标准差为±0.360 m,表明了 CQG2000 的精度为分米级。CQG2000 模型的成功研制是我国精化(似)大地水准面的阶段性进展,分辨率和精度达到了一个新的水平,但和国际上先进水平相比,还有比较大的差距。

我国是一个幅员辽阔、地形起伏很大的国家,各省市经济发展很不平衡,重力场的变化也较复杂,特别是中、西部区重力场的短波成分很复杂,要全面实现厘米级(似)大地水准面的目标,还需长期的努力。从测绘生产应用来看,CQG2000 基本可以满足中、小比例尺(小于 1∶10000)航测测图采用 GPS 高程作地面高程控制的要求,但大



比例尺(如1∶5000～1∶500)测图要求似大地水准面模型分别达到厘米级和2.0～5.0 km甚至更高的精度和分辨率,CQG2000与此要求还有较大差距,所以在我国部分省市和经济发达地区率先建立高精度高分辨率省市级大地水准面模型已成必然趋势。目前,国家已经先后成功完成了部分省市的似大地水准面精化工作,其中浙闽赣区域似大地水准面内符合精度达到±0.055 m,外符合精度达到±0.062 m,华东、华中区域似大地水准面总体外符合精度达到±0.041 m,精度均达到厘米级精度;在完成的城市(似)大地水准面中,东莞、广州、武汉市的似大地水准面精度均优于0.010 m,使得我国城市似大地水准面确定精度实现了新的发展。全球定位技术结合1 cm精度似大地水准面成果,可以满足二等水准测量要求,是高程测定的一次里程碑式跨越。

第2章　地球重力学理论基础

2.1　重力和重力位

2.1.1　重力和重力测量

物体的自由下落、水准面的形状、垂线的方向以及人造卫星围绕地球的运动等，都和地球的重力有着密切的关系。地球外部空间的任一质点总是受到两个力的作用：一是组成地球的所有质点对该质点的吸引力；二是该质点随地球以等角速度 ω 绕固定轴旋转而产生的惯性离心力，这两个力的合力称为"重力"。研究重力的作用时，不仅要研究重力的大小，也要研究重力的方向。地球外部空间的质点除了受到地球质量的吸引外，还受到宇宙间其他天体的吸引，同时地球的旋转轴、地球的形状及其内部质量的分布都不是固定不变的，因此广义的重力定义为：宇宙间全部的物质对地球上任一质点所产生的引力和该点随地球相对于惯性中心运动而引起的离心力的合力。由于天体相对于地球位置的变化、地球瞬时旋转轴的摆动以及地球形状的改变和内部质量的迁移等因素的变化，广义定义的重力随时间而发生周期性和长期性的变化，现在，高精度的重力测量已经能够测定这种随时间变化的重力。

重力 G 是质量 m 和重力加速度 g 的乘积，重力测量就是测定重力加速度 g 的数值，重力的量纲为厘米/秒^2（cm/s^2），这种单位称为



“伽”(Gal,为纪念伽利略而定名)。千分之一伽称为“毫伽”(mGal);千分之一毫伽称为“微伽”(μGal),即:

$$1\ \mathrm{cm/s^2}=1\ \mathrm{Gal}=10^3\ \mathrm{mGal}=10^6\ \mu\mathrm{Gal}$$

重力测量有绝对重力测量和相对重力测量两种。绝对重力测量是用绝对重力仪直接测定地面上点的绝对重力值 g 。绝对重力只能通过动力法测定,这种方法是通过观测物体的运动状态(例如利用物体的自由落体或自由摆动)来测定重力,地球表面上点的绝对重力值为 978～983 Gal。目前国际上较新的落体式绝对重力仪 FG5,精度可达±2 μGal。相对重力测量是利用相对重力仪测定地面上两点之间的重力差值。相对重力可通过动力法或者静力法(例如观测负荷弹簧的伸长来测定两点之间的重力差)测量。利用迄今为止观测精度最高、连续性和稳定性最好的相对重力仪——超导重力仪进行相对重力观测,精度可达到微伽级。

2.1.2　重力测量基准

相对重力测量测定的是两点间重力差,为了求得相对重力值,必须有一个绝对重力值已知的绝对重力点作为相对重力测量的起始点。重力基准是指绝对重力值已知的重力点。世界公认的起始重力点称为“国际重力基准”。各国进行重力测量时都尽量与国际重力基准相联系,以检验其重力测量的精度并保证观测成果的统一。国际通用的重力基准有 1909 年波茨坦重力测量基准和 1971 年的国际重力基准网(IGSN-71)。

国家重力基本网是确定我国重力加速数值的坐标体系。国家重力基本网提供重力测量的基准和最高一级控制,它是一切重力测量的基础。基本网中包括用绝对重力仪测定的绝对重力点(称为“重力基准点”),其余为采用相对重力仪联测的重力基本点。中国于 1956～1957 年建立了全国范围的第一个国家重力基准,称为“1957 年国家重力基本网”。该网由 21 个基本点和 82 个一等点组成,该网与苏联的三个重力基本点联测,属波茨坦重力系统,后来发现该系统有

±14 mGal的常差。1985 年，中国重新建立了国家重力基准。它由 6 个重力基准点、46 个重力基本点和 5 个引点组成。网中北京、上海等点与东京、京都、巴黎、香港等重力点联测，属 1971 年国际重力基准网即 IGSN-71 系统。1987 年起我国正式以该网的 57 个重力点作为重力起算点，称为“1985 国家重力基本网”。由于 1985 国家重力基本网对重力点的观测精度较低且分布不均匀，整网图形结构不尽合理，且一些点已被破坏的现状，2003 年底启用 2000 国家重力基本网。这个基本网由 21 个基准点、126 个基本点和 112 个基本点引点共计 259 个重力控制点组成，覆盖范围涵盖我国内地、香港特别行政区、澳门特别行政区及部分海域。基准点(绝对重力点)观测精度为 ±5 μGal，基本点观测精度为±10 μGal，整网的精度优于±10 μGal。

2.1.3 重力位与引力位

如果在空间区域的每一点上，都有一个力作用着，此力仅和该点的坐标有关，我们把这空间区域叫“力场”。研究力的作用时，既要研究力的大小，也要研究力的方向。对于一个力场，如果存在标量函数 R，这个函数对各坐标轴的偏导数等于力 $\boldsymbol{F}$ 在相应的坐标轴上的投影，那么我们就称函数 R 为力 $\boldsymbol{F}$ 的“位函数”，写成矢量形式为：

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial R}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial R}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\boldsymbol{k} = \mathrm{grad}\, R \tag{2-1-1}$$

对于重力来说，存在重力位函数 W，地球外部任一点的重力 $\boldsymbol{g}$ 是力位 W 的梯度。进一步地说，重力位沿任一方向的导数就等于重力沿该方向的分量。重力场的性质完全由重力位决定，所以我们研究地球外部重力场，需要求地球外部任一点的重力位。根据力位的定义，地球外部任一点 $P(x,y,z)$ 的重力位是：

$$W = f\int_{\tau} \frac{\delta}{r}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \tag{2-1-2}$$

式中，τ 是指整个地球所占的空间；δ 为地球的密度函数；r 为体积元 $\mathrm{d}\tau$ 到点 P 的距离；ω 是地球的自转角速率；z 轴为地球自转轴；



$f\int_{\tau}\frac{\delta}{r}\mathrm{d}\tau$ 为地球的引力位；$\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$ 为离心力位。

地球的自转角速率和自转轴可以用天文观测方法精确测定，只要知道坐标便可以精确地计算离心力位。所以，研究重力位主要是要确定地球外部任一点的引力位。

质点在引力场中运动，引力所做的功等于位函数在质点的终点和起始点的函数值之差，而与质点所经的路程无关。当质点沿一条闭合的路径曲线运动一周时，引力所做的功等于零，所以引力是保守力，引力场是保守力场。

保守力场中，质点在任一给定位置的位能是此质点从该位置运动到任意选定的零位置时保守力所做的功。如果选取无穷远处为零位能点，引力位的物理意义是质点在某一位置时对无穷远处的引力位能的负值。

2.1.4　地球引力位的性质

地球引力位 V 具有以下性质：

(1)位函数对各坐标轴的偏导数分别等于引力在相应坐标轴上的分力，这个性质一般性的描述为：位函数对任意方向 l 的导数等于引力在这个方向的分力，即：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=F_x\;;\;\frac{\partial V}{\partial y}=F_y\;;\;\frac{\partial V}{\partial z}=F_z\;;\;\frac{\partial V}{\partial l}=F_l \tag{2-1-3}$$

(2)如果在一个曲面上各点引力位相等，则这个曲面称为“等位面”或“引力位水准面”。同一簇引力位水准面之间既不平行，又不相交和相切。两个无限接近的同簇引力位水准面之间的距离与引力的数值成反比。

(3)引力位是一个在无穷远处的正则函数，它满足下列条件：

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{\rho \to \infty} V = 0 \\
\lim\limits_{\rho \to \infty} \rho \dfrac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \\
\lim\limits_{\rho \to \infty} \rho V = fM \\
\lim\limits_{\rho \to \infty} \left| \rho^2 \dfrac{\partial V}{\partial \rho} \right| = fM
\end{cases}
$$

式中，f 为引力常数；M 为地球总质量；ρ 为矢径。 (2-1-4)

满足式(2-1-4)的函数称为“在无穷远处的正则函数”。地球对外部一点的引力位满足这些条件，因此地球引力位在无穷远处是正则函数。

(4)地球引力位及其一阶导数是处处连续的、有限的和唯一的函数。地球引力位的二阶导数在密度发生突变时是不连续的(如地球内部密度为 δ，地球外部密度突变为零，在地球表面地球引力位的二阶导数是不连续的)。

(5)在地球外部，引力位 V 满足拉普拉斯(Laplace)方程：

$$
\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2-1-5}
$$

这个二阶偏微分方程称为“Laplace 方程”，其中的算子 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 叫“Laplace 算子”。满足 Laplace 方程的函数称为“调和函数”，因此地球外部引力位是一个调和函数。

地球外部的引力位函数是一个在无穷远处的正则函数，也是一个调和函数。如果我们能唯一地确定一个函数，它在地球外部调和，在无穷远处正则，其梯度等于引力，则这个函数必然是引力位。



2.2　地球引力位的级数式

2.2.1　地球外部 Laplace 方程分离变量有限解的一般形式

地球引力位函数 V 在地球外部是调和函数，满足 Laplace 方程，即：

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{2-2-1}$$

球坐标和直角坐标的关系是：

$$\begin{cases}x=\rho\sin\theta\cos\lambda\\ y=\rho\sin\theta\sin\lambda\\ z=\rho\cos\theta\end{cases} \tag{2-2-2}$$

式中，ρ 为矢径；θ 为极距；λ 为地心经度。

将直角坐标系中的 Laplace 算子依上述关系换算到球坐标系中为：

$$\Delta V=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\right] \tag{2-2-3}$$

式(2-2-3)即为 Laplace 算子在球坐标中的表达式。令式(2-2-3)等于零，两边同乘以 ρ^2 得球坐标中的 Laplace 方程：

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}=0 \tag{2-2-4}$$

分离变量法就是将方程的解分解为不同自变量的函数之积，令

$$V(\rho,\theta,\lambda)=f(\rho)B(\theta)L(\lambda) \tag{2-2-5}$$

这样球坐标中的 Laplace 方程分解成的三个常微分方程的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2 L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2}+\beta L(\lambda)=0\\&\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}B(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+(\alpha\sin^2\theta-\beta)B(\theta)=0\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho^2\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]-\alpha\cdot f(\rho)=0\end{aligned}\right\}\tag{2-2-6}$$

三个常微分方程的特征值和特征函数为：

$$\left.\begin{aligned}&\beta=k^2, L_1(\lambda)=\cos k\lambda, L_2(\lambda)=\sin k\lambda\\&\alpha=n(n+1), B(\theta)=\mathrm{P}_n^k(\cos\theta); n=k,k+1,\cdots\\&f_1(\rho)=\rho^n, f_2(\rho)=\frac{1}{\rho^{n+1}}\end{aligned}\right\}\tag{2-2-7}$$

式中，$\mathrm{P}_n^k(\cos\theta)$ 为勒让德缔合函数。

任意形式的线性组合 $f(\rho)B(\theta)L(\lambda)$ 都是 Laplace 方程(2-2-4)的解，但是 $f(\rho)$，$B(\theta)$，$L(\lambda)$ 都有一系列的解，而且 Laplace 方程任意解的线性组合仍然是它的解。所以，由分离变量法求得的 Laplace 方程最一般解是所有可能乘积 $f(\rho)B(\theta)L(\lambda)$ 的线性组合，而符合地球外部有界调和函数的 Laplace 方程分离变量有限解的一般形式是：

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(A_n^k\cos k\lambda+B_n^k\sin k\lambda)\mathrm{P}_n^k(\cos\theta)\tag{2-2-8}$$

式中，当 $k=0$ 时，$\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ 称为“主球函数”(或“带球函数”)，$\mathrm{P}_n^k(\cos\theta)$ 称为“勒让德缔合(或伴随)函数”，$\cos k\lambda\cdot\mathrm{P}_n^k(\cos\theta)$ 和 $\sin k\lambda\cdot\mathrm{P}_n^k(\cos\theta)$ 称为“缔合球函数”(其中，当 $k=n$ 时，称为“扇球函数”；当 $k\neq n$ 时，称为“田球函数”)。主球函数和缔合球函数都称为“面球函数”，面球函数与 $\frac{1}{\rho^{n+1}}$ 的乘积称“体球函数”。

2.2.2 球函数的几何意义

主球函数 $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ 的一般形式为：

$$\mathrm{P}_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^2(\cos^2\theta-1)^n}{\mathrm{d}(\cos\theta)^n}\tag{2-2-9}$$



用这个公式可以写出任意阶的主球函数，这个公式也称“罗巨格(Rodrigues)公式”。

勒让德缔合函数的一般形式为：

$$P_n^k(\cos\theta) = \sin^k\theta \frac{d^k P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^k} \tag{2-2-10}$$

主球函数有两个性质：

(1)当 n 是偶数时，$P_n(\cos\theta)$ 是偶函数；当 n 是奇数时，$P_n(\cos\theta)$ 是奇函数。

(2) $P_n(\cos\theta)$ 在 $\theta \in [0,\pi]$ 的区域内有 n 个零点。

根据 $P_n(\cos\theta)$ 的性质，它在 $\theta \in [0,\pi]$ 区域内有 n 个零点，因此它将球面划分为 $n+1$ 个环带，各环带之间 $P_n(\cos\theta)$ 的数值正负交错。对于偶数阶 $P_n(\cos\theta)$，因为 $P_n(\cos\theta)$ 是偶函数，所以它的数值对称于赤道；对于奇数阶 $P_n(\cos\theta)$，其数值表现为南北半球不对称。

(1)二阶主球函数

$n=2$ 时，二阶主球函数为：

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

当 $\theta = 54.7°$ 和 $\theta = 125.3°$ 时，$P_2(\cos\theta) = 0$。它们将球面分成3个环带，并对称于赤道，如图2-1所示。

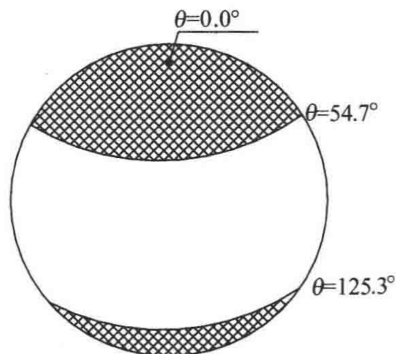


图2-1　二阶主球函数

(2)三阶主球函数

$n=3$ 时，三阶主球函数为：

$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

当 $\theta=50.8°$、$\theta=90.0°$ 和 $\theta=129.2°$ 时，$P_3(\cos\theta)=0$。它们将球面分成 4 个环带，南北半球不对称，如图 2-2 所示。

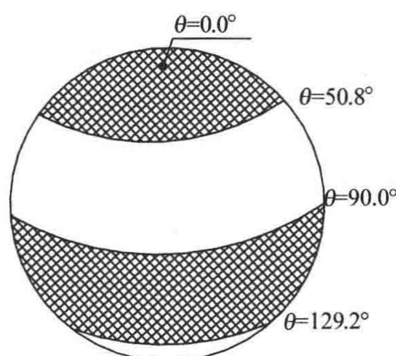


图 2-2　三阶主球函数

(3)二阶扇球函数

$n=k=2$ 时，扇球函数为：

$P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda=3\sin^2\theta\cos 2\lambda$ 和 $P_2^2(\cos\theta)\sin 2\lambda=3\sin^2\theta\sin 2\lambda$

对于 $P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda$，当 θ 及 λ 为表 2-1 中所示数值时，以经线将球面分成 4 个扇形，在扇形之间扇球函数正负交错。图 2-3 为 $P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda$ 的图形，对于 $P_2^2(\cos\theta)\sin 2\lambda$ 也有类似情况。

表 2-1

	$P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda$			
θ	0°		180°	
λ	45°	135°	225°	315°



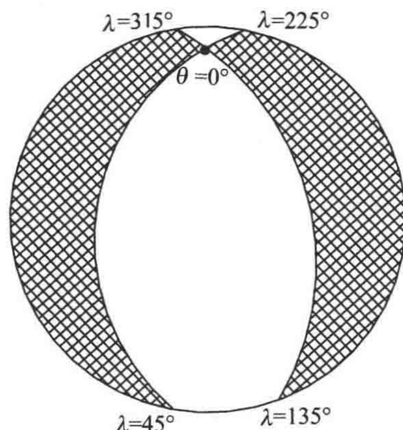


图 2-3　二阶扇球函数

(4)田球函数

当 $k \neq n(0 < k < n)$ 时称为田球函数，田球函数为：$P_n^k(\cos\theta)\cos k\lambda$ 和 $P_n^k(\cos\theta)\sin k\lambda$ 。$P_n^k(\cos\theta)=0$ 有 $n-k$ 个实根，相当于 θ 在 $n-k$ 个纬圈上使缔合球函数为零，这样就将整个球面分成 $n-k+1$ 个环带。$\cos k\lambda=0$ 或者 $\sin k\lambda=0$ 有 $2k$ 条经线将整个球面划分成 $2k$ 个扇形。因此整个球面就由这些经、纬线分成许多球面四边形(两极地区为三角形)，所以这种缔合球函数称田球函数。田球函数的数值在各个方格之间正负交错。图 2-4 为 $P_4^2(\cos\theta)\cos 2\lambda$ 的图形，$P_4^2(\cos\theta)\sin 2\lambda$ 的图形类似。

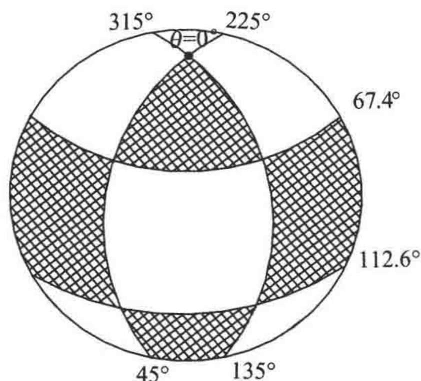


图 2-4　田球函数

2.2.3 地球引力位的级数展开式

地球外部引力位是球外调和函数，同时是一个在无穷远处的正则函数，地球外部引力位可以用球函数级数式表达为：

$$V=\frac{fM}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(A_n^k\cos k\lambda+B_n^k\sin k\lambda)\mathrm{P}_n^k(\cos\theta)\right] \tag{2-2-11}$$

式中，ρ 为矢径；θ 为极距；λ 为地心经度；f 为引力常数；M 为地球质量；a 为地球椭球的长半径。

在地球引力位球函数级数式中，零阶项是地球正球产生的引力位，只与地球的质量 M 有关，是地球引力位的主项；一阶项和地球质心的坐标有关，将坐标原点放在地球质心上，则一阶项系数为零；二阶项与地球相对于坐标轴的转动惯量和乘积惯量有关，将坐标原点放在地球质心上，坐标轴与主惯性轴重合，其中的三个二阶小项 A_2^1，B_2^1 和 B_2^2 都为零，将赤道看作一个圆，A_2^2 也为零，二阶项就只剩 A_2^0 项了。在研究地球重力场时，地球引力位的级数式往往写为完全规格化的球函数级数形式，这样地球引力位可表达：

$$V(\rho,\theta,\lambda)=\frac{fM}{\rho}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda+\bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)\right] \tag{2-2-12}$$

式中，$\bar{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)$ 为完全规格化的伴随勒让德多项式；$\bar{C}_{nk}$ 和 $\bar{S}_{nk}$ 为完全规格化的球谐系数。

2.3 地球正常重力场

2.3.1 正常重力场的概念

地球外部的引力位是不规则的函数，大地水准面的形状也不规



则，在实际应用中，通常选取一个函数关系简单，而又非常接近地球重力位的辅助重力位，这个重力位是人为选择的质体产生的重力位，称之为“正常重力位”。其相应的引力位、引力和重力分别叫作“正常引力位”“正常引力”“正常重力”。把正常重力位当作已知形状的质体产生的，作为已知值，然后求出地球重力位和正常重力位的差异，再进一步求出大地水准面和这已知形状的差异，最后求得地球重力位和地球形状。

确定正常重力位的方法有如下两种：

(1)地球的重力位展开成球函数级数的形式，然后在级数中取最大的几项作为正常重力位，取多少项视精度而定。令正常重力位等于不同的常数可求得一簇正常位水准面，选择其中的一个，假设它是产生正常重力位的质体的表面，则正常重力就理解为该质体产生的重力场。这个正常重力位是人为选定的，正常重力就是正常重力位的梯度，这种确定正常重力位的方法称“Laplace 方法”。

(2)选择一个形状和大小已知的质体，并且知道该质体的总质量和旋转角速度，根据 Stokes 定理知道，该质体在外部的重力位和重力是唯一确定的。用数学方法求得这个质体的重力位，将它当作正常重力位，这种确定正常重力位的方法称“Stokes 方法”。

2.3.2　Laplace 方法表示的正常重力

地球重力位完全规格化的球函数级数形式为：

$$W = \frac{fM}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda + \bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)\right] + \frac{\omega^{2}}{2}\rho^{2}\sin\theta \tag{2-3-1}$$

式中，f 为引力常数；M 为地球质量；a 为地球椭球的长半径。

用 Laplace 方法表示的正常重力位，就是在重力位的球函数展开式中选取前几项，实际应用中选取项数的多少是根据对正常重力位所要求的精度而定。坐标原点放在地球质心上，坐标轴与地球主

惯性轴重合，选取 n 的前三项的正常重力位可以表示为：

$$U=\frac{fM}{\rho}\left[1+\frac{\mu}{3}(1-3\cos^2\theta)+\frac{q}{2}\sin^2\theta\right]=\text{常数} \quad (2\text{-}3\text{-}2)$$

式中，$\mu=\frac{3K}{2a^2}$ 为地球形状参数，其中 K 是与地球扁率有关的项；$q=\frac{\omega^2 a}{g_e}$ 表示地球赤道上的离心力和重力的比值。

令式(2-3-2)等于不同的常数，就有一簇正常位水准面，总有一个非常接近于大地水准面的一个正常位水准面。当取赤道上一点($\theta=90°,\rho=a$)时的正常位作为常数时，在顾及到扁率级精度的情况下，接近于大地水准面的那个正常位水准面的方程式为：

$$\rho=a\left[1-(\mu+\frac{q}{2})\cos^2\theta\right] \quad (2\text{-}3\text{-}3)$$

其形状是一个规则的椭球体，称为“水准椭球体”，它的扁率 $\alpha=\mu+q/2$。

水准椭球体上的正常重力为：

$$\gamma_0=\frac{fM}{a^2}\frac{[1+\mu(1-3\cos^2\theta)-q\sin^2\theta]}{\left[1-(u+\frac{1}{2}q)\cos^2\theta\right]^2} \quad (2\text{-}3\text{-}4)$$

将上式分母展开成级数，只保留到 α 量级，得：

$$\gamma_0=\frac{fM}{a^2}\left[1+\alpha-\frac{3}{2}q+(\frac{5}{2}q-\alpha)\cos^2\theta\right] \quad (2\text{-}3\text{-}5)$$

当 $\theta=90°$ 时，得赤道上的正常重力为：

$$\gamma_e=\frac{fM}{a^2}\left(1+\alpha-\frac{3}{2}q\right)$$

当 $\theta=0°$ 时，得极点上的正常重力为：

$$\gamma_p=\frac{fM}{a^2}(1+q)$$

定义 β 为重力扁率，则：

$$\beta=\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e}=\frac{5}{2}q-\alpha \quad (2\text{-}3\text{-}6)$$



式(2-3-6)称为“克莱饶定理”,它表达了重力扁率与椭球体扁率之间的关系。

顾及 α 量级,按纬度 φ 计算椭球体上正常重力值的公式为:

$$\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 \varphi) \tag{2-3-7}$$

2.3.3　Stokes 方法表示的正常重力

大地测量中总是选择参考椭球体作为归算的基准面,它的几何形状是一个规则的旋转椭球体,索里米安利用 Stokes 方法推导出了与大地水准面相接近的旋转椭球体上的正常重力为:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \tag{2-3-8}$$

式中,B 是大地纬度;γ_e 是椭球体赤道上的正常重力;γ_p 是椭球体极点上的正常重力。

由 $\beta = \dfrac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$ 和 $\alpha = \dfrac{a - b}{a}$,式(2-3-8)可以化为:

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_e[1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta) \sin^2 B]}{\sqrt{1 - (2\alpha - \alpha^2) \sin^2 B}} \tag{2-3-9}$$

顾及到扁率平方级量,将上式展开,得:

$$\gamma_0 = \gamma_e[1 + \beta \sin^2 B - (\frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta) \sin^2 2B] \tag{2-3-10}$$

2.4　高程系统及相互关系

2.4.1　大地高

大地高是以参考椭球面为基准的高程系统,地面点的大地高定义为由地面点沿过该点的椭球法线到参考椭球面的距离。大地高程是一个几何量,不具有物理意义,不同定义的椭球大地坐标系,也构成不同的大地高程系统。GPS 定位测量获得的是 WGS-84 椭球大

地坐标系中的成果，是相对于 WGS-84 椭球的大地高程。

大地高 H 可以分解为正高 H_g 和大地水准面差距 N 两部分，即

$$H = H_g + N \tag{2-4-1}$$

式中，正高 H_g 是由地面至大地水准面的距离；大地水准面差距 N 是大地水准面到参考椭球体的距离。

大地高 H 还可以分解正常高 H_r 和高程异常 ζ 两部分，即：

$$H = H_r + \zeta \tag{2-4-2}$$

式中，正常高 H_r 是地面点至似大地水准面的距离；高程异常 ζ 是似大地水准面至参考椭球体的距离。大地高与正常高和正高的关系如图 2-5 所示。

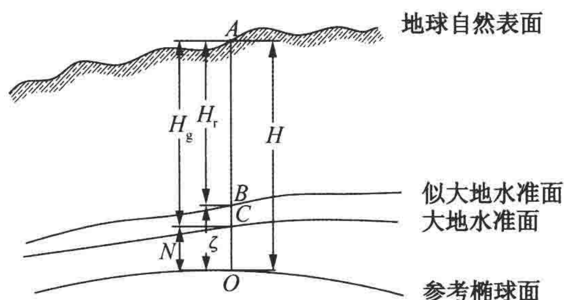


图 2-5　大地高与正常高和正高的关系

2.4.2　正高

水准测量是求得高差的主要方法，水准测量测定的高差 Δh 是以水准仪的视线(过视准轴的水准面的切线)为依据的。由于水准面之间的不平行性，水准测量所测得的高差随着水准路线的不同而不同，也就是说几何水准高差是多值的，必须加入水准面不平行性的改正才能将它化为唯一的数值，即正高。

正高系统是以大地水准面为基准的高程系统。地面点的正高 H_g 定义为由地面点沿铅垂线至大地水准面的距离。大地水准面是一簇重力等位面中最接近平均海水面的一个，由于水准面之间的不



平行性，所以过一点并与水准面相垂直的铅垂线实际是一条曲线。正高的计算公式为：

$$H_g = \frac{1}{g_m}\int g\mathrm{d}H \tag{2-4-3}$$

式中，$\int g\mathrm{d}H$ 是水准原点和地面观测点之间的位差；g_m 为由地面点沿铅垂线至大地水准面的平均重力加速度。

由于 g_m 与地壳密度有关，必须假定地壳密度，才可以近似求得，g_m 无法直接测定，所以从严格意义上说，正高是不能精确确定的。正高具有明确的物理意义。

2.4.3　正常高

由于正高无法精确确定，为了使用方便，建立了正常高系统，其定义为：

$$H_r = \frac{1}{r_m}\int g\mathrm{d}H \tag{2-4-4}$$

式中，$\int g\mathrm{d}H$ 是水准原点和地面观测点之间的位差；r_m 为由地面点沿铅垂线至似大地水准面之间的平均正常重力值。

r_m 可以精确求得，所以正常高是可以精确确定的。现在我国国家高程系统采用正常高系统。同一重力位水准面上的正常高是不相等的。

2.4.4　地区力高

若将正常高应用于同一个重力位水准面上的两点 A 和 B，由于 r_m^A 不等于 r_m^B，所以同一重力位水准面上的正常高是不相等的，其差值在大范围内可能达到较大的数值而超过测量限差，给工程建设带来不便。为解决这个矛盾，可以采用地区力高系统，力高系统定义为：

$$H_d = \frac{1}{r_\varphi}\int g\mathrm{d}H \tag{2-4-5}$$

式中，γ_φ 为测量地区的平均纬度或纬度 45°处的正常重力。

由于 γ_φ 是常数，所以同一重力位水准面上力高处处相等。

用地面上的水准测量和重力测量数据可以求得两点间的重力位差，用重力位差除以不同类型的重力就得到不同的高程。对于高精度、大范围的水准测量来说，不配以重力数据的高差是没有意义的。

2.5 位理论的边值问题

2.5.1 边值问题的基本类型

位理论的边值问题是物理大地测量学的主要理论支柱，是研究地球重力场的理论基础，也是局部重力场逼近的基本理论。位理论的边值问题可分为内部和外部两种。位理论的外部边值问题就是在某一空间区域 τ 的边界面 σ 上已知函数值 $F(\sigma)$，而这些函数值与所求量之间又满足一定的边值条件，根据边界面上的函数值和边值条件，求出在外部空间是调和的并在无穷远处是正则的位函数。在地球形状和外部重力场的基本理论中，就是用外部边值问题求解地球外部重力场。根据给定边值问题条件的不同，外部边值问题有三种不同的形式。

(1)第一边值问题：在边界面上已知所求调和函数的极限值 $V(\sigma)$，根据这个边值条件，求出在外部空间是调和的并在无穷远处是正则的函数。这样的边值问题又称为“狄利克雷(Dirichlet)外部问题”。

(2)第二边值问题：在边界面上已知所求调和函数的法向导数 $\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_\sigma$，根据这个边值条件，求出在外部空间是调和的并在无穷远处是正则的函数。这样的边值问题又称为“纽曼(Neumann)外部问题。”

(3)第三边值问题：在边界面上已知所求调和函数及其法向导数



的线性组合 $\alpha V+\beta\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\sigma}$（式中 α 和 β 是常系数），根据这个边值条件，求出在外部空间是调和的并在无穷远处是正则的函数。这样的边值问题又称为“罗宾(Robin)外部问题”，也叫“混合边值问题”。

2.5.2 边值问题解算的数学基础

(1)内部的格林(Green)公式

高斯公式表达出空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系。设空间闭区域 τ_i 是由分片光滑的闭曲面 σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 及其一阶导数在区域 τ_i 内是连续的，则有：

$$\iiint_{\tau_i}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau=\iint_{\sigma}[P\cos\langle n,x\rangle+Q\cos\langle n,y\rangle+R\cos\langle n,z\rangle]\mathrm{d}\sigma \tag{2-5-1}$$

式中，n 是 σ 的外法线方向。

假设在区域 τ_i 内有两个函数 u_i 和 v_i，它们及其二阶导数在 τ_i 内是连续和有限的，并假设这两个函数与函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 的关系为：

$$P=u_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\text{；}Q=u_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\text{；}R=u_i\frac{\partial v_i}{\partial z} \tag{2-5-2}$$

将式(2-5-2)代入式(2-5-1)得到内部的第一格林公式：

$$\iiint_{\tau_i}[u_i\Delta v_i+D(u_i,v_i)]\mathrm{d}\tau=\iint_{\sigma}u_i\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}\sigma \tag{2-5-3}$$

式中，符号 D 表示：

$$D(u_i,v_i)=\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial z}$$

将式(2-5-3)中的 u_i 和 v_i 互换，就可以得到相似的方程：

$$\iiint_{\tau_i}[v_i\Delta u_i+D(v_i,u_i)]\mathrm{d}\tau=\iint_{\sigma}v_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}\sigma \tag{2-5-4}$$

将式(2-5-3)与式(2-5-4)相减，得到内部的第二格林公式：

$$\iiint_{\tau_i}(u_i\Delta v_i - v_i\Delta u_i)\mathrm{d}\tau = \iint_{\sigma}(u_i\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}n} - v_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}n})\mathrm{d}\sigma \tag{2-5-5}$$

(2)外部的格林公式

假设函数 u_e 和 v_e 是在曲面 σ 外部区域 τ_e 内有两个连续的并在无穷远处是正则的函数，同时在 τ_e 内存在有限连续二阶导数，这种情况下同样可以得到对外部的格林公式。外部的第一格林公式为：

$$\iiint_{\tau_e}[u_e\Delta v_e + D(u_e,v_e)]\mathrm{d}\tau = -\iint_{\sigma}u_e\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}\sigma \tag{2-5-6}$$

外部的第二格林公式为：

$$\iiint_{\tau_e}(u_e\Delta v_e - v_e\Delta u_e)\mathrm{d}\tau = \iint_{\sigma}(u_e\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}n} - v_e\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}n})\mathrm{d}\sigma \tag{2-5-7}$$

2.5.3 边值问题解的存在性与唯一性

Dirichlet 首先证明出边值问题是存在的：在质体的外部区域内，可以找到一个调和函数，它在无穷远处正则，在边界面上的数值等于给定的边值。这就是边值问题解的存在性。

对于第一边值问题，假设解不是唯一的，在质体的外部区域内有两个值 V_1 和 V_2，它们是调和的，并在无穷远处是正则的，在边界曲面 σ 上具有相同的极值。将格林公式(2-5-6)用于函数 $T=V_1-V_2$，则得：

$$\iiint_{\tau_e}[T\Delta T + D(T,T)]\mathrm{d}\tau = -\iint_{\sigma}T\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}\sigma \tag{2-5-8}$$

函数 T 在区域内也是调和的，在无穷远处是正则的，在边界面 σ 上 $T|_{\sigma}=0$，式(2-5-8)变为：

$$\iiint_{\tau_e}D(T,T)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{2-5-9}$$

由于 $D(T,T)=(\frac{\partial T}{\partial x})^2+(\frac{\partial T}{\partial y})^2+(\frac{\partial T}{\partial z})^2$ 的各项都不是负值，要使式(2-5-9)成立，必须在曲面 σ 外每一点上都满足 $\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}$



$=\frac{\partial T}{\partial z}=0$，即 $T=$ 常数。由于 T 是正则函数，在无穷远处等于零，所以在 σ 外 T 只能等于零，即 $V_1=V_2$，就是说第一边值问题的解是唯一的。

同样的方法可以证明第二和第三边值问题的解也是唯一的，只是第三边值问题的解是有条件的，在边界条件中的常系数 α 和 β 异号的情况下解才是唯一的。

边值问题解的存在性与唯一性可以统一表达为：可以找到一个在边界面上取预定数值的 Laplace 方程的解，这样的解只有一个。

2.6　Stokes 边值问题和 Molodensky 边值问题

2.6.1　Stokes 边值问题

地球表面形状的不规则和内部密度分布不均匀导致地球外部重力场的复杂性，将重力位分为正常位和扰动位两部分。正常位可以用四个大地测量基本参数（a，J_2，M 和 ω）确定，因此是已知量；扰动位为微小量，起修正作用。研究地球形状和外部重力场的关键在于求定扰动位 T。当已知大地水准面上的重力异常：

$$\Delta g=g-\gamma \tag{2-6-1}$$

式中，g 为大地水准面上的重力值；γ 为正常椭球面上对应点的正常重力值。

将正常椭球面作球近似假设，则重力异常 Δg 与扰动位 T 之间的关系式，即重力测量基本微分方程为：

$$\Delta g=-\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{2T}{R} \tag{2-6-2}$$

式中，r 为球面向径；R 为地球平均半径。

扰动位 T 在大地水准面 S 外是调和函数，在边界面上满足重力测量基本微分方程，即：

$$\left.\begin{aligned} &\Delta T = 0,\text{在 } S \text{ 面外部} \\ &\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{R} = -\Delta g,\text{在 } S \text{ 面上} \\ &T \to 0,\text{当 } r \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-6-3}$$

求解大地水准面外部扰动位问题就可归结为以大地水准面为边界面的第三边值问题，这个边值问题称为“Stokes 边值问题”。由于边界面(大地水准面)依赖于扰动位，是未知的，所以 Stokes 边值问题属自由边值问题。

英国数学家、物理学家 Stokes 于 1849 年导出由大地水准面上的重力异常 Δg 求大地水准面外部空间的扰动位 T 的公式，其结果为：

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{R^2}{4\pi}\iint_{\sigma} \Delta g S(r,\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{2-6-4}$$

式中，$S(r,\varphi)$ 称为“广义 Stokes 函数”，其表达式为：

$$S(r,\varphi) = \frac{2}{l} - 3\frac{l}{r^2} + \frac{1}{r} - 5\frac{R}{r^2}\cos\varphi - 3\frac{R}{r^2}\cos\varphi\ln\frac{l + r - R\cos\varphi}{2r} \tag{2-6-5}$$

式(2-6-4)和式(2-6-5)中，(r,θ,λ) 为计算点的球面坐标；l 为计算点至球面上流动点的距离；R 为球面半径；φ 为计算面和流动点间的球面角距；$\mathrm{d}\sigma$ 为单位球面面元。

如果所求的点在大地水准面上，则 $r = R$，得到大地水准面上扰动位的解为：

$$T(R,\theta,\lambda) = \frac{R}{4\pi}\iint_{\sigma} \Delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{2-6-6}$$

式中，$S(\varphi) = RS(R,\varphi)$ 称为“Stokes 函数”，其表达式为：

$$S(\varphi) = \csc\frac{\varphi}{2} - 6\sin\frac{\varphi}{2} + 1 - 5\cos\varphi - 3\cos\varphi\ln\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \tag{2-6-7}$$

根据 Bruns 定理，大地水准面差距 N 与扰动位 T 的关系可以表达为：



$$N = T/\gamma \tag{2-6-8}$$

式中，γ 为正常重力值。由此可求得大地水准面差距的计算公式为：

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} \Delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{2-6-9}$$

式(2-6-6)和式(2-6-9)称为“Stokes 公式”。利用这个公式可以由大地水准面上的重力异常确定大地水准面的形状。

上述 Stokes 公式是在球近似的情况下导出的，误差为扁率级。就是说当大地水准面差距 N 为 100 m 时，误差 $\delta N \approx 0.3$ m。若以同大地水准面十分接近的旋转椭球面作为边界面，解算的扰动位 T 具有扁率平方项的误差。在实用中，一般采取加扁率级改正的方法进行高精度的大地水准面计算。将大地水准面近似地看作椭球面或球面实际上是将自由边值问题简化成了固定边值问题。

根据 Stokes 理论，大地水准面外部不能有质量存在，必须把大地水准面外的物质移到大地水准面内部去，同时要求将地面上的实测重力值归算到大地水准面上。重力归算不可避免地使大地水准面产生变形，所以按 Stokes 理论求得的大地水准面是调整后的大地水准面。

2.6.2 Molodensky 边值问题

Stokes 公式确定大地水准面的方法虽然形式上简单，但它需要大地水准面上的重力异常值，实际观测是在地球自然表面进行的，在重力归算的过程中不可避免地使大地水准面产生变形。Molodensky 提出利用地球自然表面上的各种观测数据确定真地球形状。Molodensky 边值问题是一个非线性自由边值问题，其中重力 $(g-\gamma)$ 和重力位 W 都是地球自然表面上的非线性函数，通过引入已知的似地球表面和正常重力位，将自由边值问题转化为固定边值问题，并应用 Taylor 级数顾及它们与地球表面和重力位的线性项来解算扰动位。Molodensky 用到地面混合重力异常，即地面实测重力和似地球表面上相应点的正常重力之差 $\Delta g = g - \gamma$。用一个不旋转

的圆球近似代替参考椭球，Molodensky 边值问题可表示为：

$$\left.\begin{aligned} &\Delta T=0,\text{在}\ \Sigma\ \text{面外部}\\ &\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{2T}{r}=-\Delta g,\text{在}\ \Sigma\ \text{面上}\\ &T\to 0,\text{当}\ r\to 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-6-10}$$

式(2-6-10)又称“简化的 Molodensky 边值问题”。由于边界面(似地球表面)比较复杂，扰动位要根据积分方程用逐次趋近法解算。球近似下的 Molodensky 级数解为：

$$T=T_0+T_1+T_2+\cdots$$

$$\begin{cases} T_0=\dfrac{R}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}G_0S(\varphi)\mathrm{d}\sigma\\ T_1=\dfrac{R}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}G_1S(\varphi)\mathrm{d}\sigma\\ T_2=\dfrac{R}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}G_2S(\varphi)\mathrm{d}\sigma-\dfrac{R^2}{2}\iint\limits_{\sigma}\dfrac{(h-h_P)^2}{l_0^3}x_0\mathrm{d}\sigma\\ \vdots \end{cases} \tag{2-6-11}$$

式中，R 为平均椭球体的平均半径；G_0 为地面混合重力异常；$\delta g_1=\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}(g-\gamma)\dfrac{H^{\gamma}-H_0^{\gamma}}{r^3}\mathrm{d}\sigma$；$h$ 和 h_P 分别为边界面上流动点和计算点的正常高；l_0 为它们之间的距离；$\mathrm{d}\sigma$ 为单位球面面元。G_n 按下式计算：

$$\begin{cases} G_0=\Delta g\\ G_1=R^2\iint\limits_{\sigma}\dfrac{h-h_P}{l_0^3}x_0\mathrm{d}\sigma\\ G_2=R^2\iint\limits_{\sigma}\dfrac{h-h_P}{l_0^3}x_1\mathrm{d}\sigma-\dfrac{3R}{4}\iint\limits_{\sigma}\dfrac{(h-h_P)^2}{l_0^3}x_0\mathrm{d}\sigma+2\pi x_0\tan^2\beta\\ \vdots \end{cases} \tag{2-6-12}$$

式中，$x_n=\dfrac{1}{2\pi}G_n+\dfrac{3}{16\pi^2}\iint\limits_{\sigma}G_nS(\varphi)\mathrm{d}\sigma$。$T_0$ 项是将地球看成球面时的



扰动位，称为“零次逼近公式”，$T_0 + T_1$ 为一次逼近公式。在应用中一般采用零次逼近公式，地形起伏甚大的地区则采用一次逼近公式。一般用 $G_1 = \frac{1}{2\pi}R^2\iint\limits_{\sigma}\frac{h - h_P}{l_0^3}\Delta g\mathrm{d}\sigma$ 计算 G_1，引起的误差小于 h/R 量级。

2.6.3 Molodensky 与 Stokes 边值问题解的区别与联系

Molodensky 与 Stokes 方法都是根据重力异常数据解算扰动位并进一步求其他有关数据，Molodensky 问题的零次近似就是 Stokes 解，Molodensky 问题的一次近似在某种意义上相当于采用法耶(Faye)异常的 Stokes 解，这是两种方法的共同点。

但 Molodensky 方法是利用地面上的重力异常解算地面上及其外部的扰动位，而 Stokes 方法是利用大地水准面上的重力异常解算大地水准面上及其外部的扰动位。根据 Stokes 理论，必须把大地水准面外的物质移到大地水准面内部去，同时要求将地面上的实测重力值归算到大地水准面上，重力归算不可避免地使大地水准面产生变形。同时，求地面点的正高还不得不对地壳密度分布作某种假设。Molodensky 方法使用的是地球自然表面上的重力异常，不需要假设地壳密度。

我国的高程系统是以似大地水准面为基准的正常高系统，精确确定似大地水准面是建立现代高程基准的主要任务。由于大地水准面和似大地水准面之间差异不大，而大地水准面又具有等位面的性质，具有明确的物理意义，因此，确定大地水准面也仍具有重要的现实意义。

第3章　CHAMP卫星的轨道数据处理

3.1　卫星重力学的坐标系统与时间系统

坐标系统与时间系统是描述卫星运动、处理观测数据和解释处理计算结果的数学物理基础，本节主要介绍卫星大地测量学常用的坐标系统和时间系统。

3.1.1　坐标系统

卫星大地测量学中常用的坐标系统有两类：空固坐标系统和地固坐标系统。空固坐标系统用于描述卫星在惯性系中的运行位置和状态；地固坐标系统随地球体转动，可以方便地表达地面点的位置。这两类坐标系统之间可以进行坐标转换。

(1)协议天球坐标系

瞬时天球坐标系的原点 o 位于地球质心，z 轴指向天球北极，x 轴指向春分点，y 轴垂直于 xoz 平面并与 x 轴和 z 轴构成右手坐标系。在岁差和章动的影响下，瞬时天球坐标系的坐标轴的指向在不断地变化。在这种非惯性坐标系统中，不能直接根据牛顿力学定律来研究卫星的运动规律。为了建立一个与惯性坐标系相接近的坐标系，我们选择某一时刻 t_0 作为标准历元，并将此时刻地球的瞬时自转轴和地心至瞬时春分点的方向，经该瞬时的岁差和章动改正后，分别作为 z 轴和 x 轴的指向，由此所构成的空固坐标系，称为所取标准



历元 t_0 的“平天球坐标系”，或称“协议天球坐标系”，也称为“协议惯性坐标”，简称为 CIS。从 1984 年 1 月 1 日后启用的协议天球坐标系，其坐标轴的指向，是以 2000 年 1 月 15 日 TDB（太阳质心力学时）为标准历元（标以 J2000.0）的赤道和春分点所定义。

（2）协议地球坐标系

地球坐标系的原点 o 位于地球质心，z 轴指向地球北极，x 轴指向格林尼治平子午面与地球赤道的交点，y 轴垂直于 xoz 平面并与 x 轴和 z 轴构成右手坐标系。由于地球自转轴相对地球体的位置是随时间变化的，因而地极点在地球表面的位置也是变化的，地极的移动将使地球坐标系坐标轴的指向发生变化。国际天文学联合会和国际大地测量学协会采用国际上五个纬度站，以 1900 至 1905 年的平均纬度所确定的平均地极位置作为基准点，这个基准点通常称为“国际协议原点”（CIO）。以此基准点为协议地极的地球坐标系，称为“协议地球坐标系”，简称为 CTS。

（3）协议天球坐标系与协议地球坐标系之间的转换关系

如果将协议天球坐标系转换为协议地球坐标系，首先将协议天球坐标系的坐标转换到瞬时天球坐标系，再转换到瞬时地球坐标系，再转换为协议地球坐标系。如果将协议地球坐标系转换为协议天球坐标系，首先将协议地球坐标系的坐标转换到瞬时地球坐标系，再转换到瞬时天球坐标系，再转换为协议天球坐标系。

根据协议天球坐标系与协议地球坐标系的定义可以知道，两坐标系原点相同，瞬时天球坐标系的 z 轴和瞬时地球坐标系的 z 轴指向相同，瞬时天球坐标系的 x 轴和瞬时地球坐标系的 x 轴指向不同，其间的夹角为春分点的格林尼治恒星时。协议天球坐标系和协议地球坐标系之间的转换关系为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathrm{CTS}} = \boldsymbol{RNP} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathrm{CIS}} \tag{3-1-1}$$

式中，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{P}$ 各矩阵分别为：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_2(-x_p)\boldsymbol{R}_1(-y_p)\boldsymbol{R}_3(S)$$

其中

$$\boldsymbol{R}_2(-x_p) = \begin{pmatrix} \cos(-x_p) & 0 & -\sin(-x_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-x_p) & 0 & \cos(-x_p) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_1(-y_p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-y_p) & \sin(-y_p) \\ 0 & -\sin(-y_p) & \cos(-y_p) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3(S) = \begin{pmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(x_p, y_p) 为地极的瞬时坐标，这里假设 (x_p, y_p) 以角度为单位，由国际地球自转服务组织根据所属台站的资料定期向用户公布提供；S 为春分点的格林尼治恒星时。

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)\boldsymbol{R}_3(-\Delta\psi)\boldsymbol{R}_1(\varepsilon) \tag{3-1-2}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) & -\sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ 0 & \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) & \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3(-\Delta\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\psi) & -\sin(\Delta\psi) & 0 \\ \sin(\Delta\psi) & \cos(\Delta\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}$$

$\varepsilon, \Delta\varepsilon, \Delta\psi$ 分别为黄赤交角、交角章动和黄经章动。在地球自转轴章动现象的影响下，黄道和赤道的交角 ε 表达为：

$$\varepsilon = 23°26'21.448'' - 46.815''T - 0.00059''T^2 + 0.001813''T^3 \tag{3-1-3}$$



$T = t - t_0$ 是从标准历元 t_0 至观测历元 t 的儒略世纪数。$\Delta\varepsilon$ 和 $\Delta\psi$ 是含有多达 106 项的复杂级数展开式，天文年历中有这些展开式的系数值，可以根据 T 值精确地计算相应的 $\Delta\varepsilon$ 和 $\Delta\psi$。

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_3(-z)\boldsymbol{R}_2(\theta)\boldsymbol{R}_3(-\xi) \tag{3-1-4}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_3(-z) = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3(-\xi) = \begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi & 0 \\ \sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z，θ，ξ 分别为与岁差有关的三个旋转角，其表达形式如下：

$$\left.\begin{aligned} z &= 0.6406161^\circ T + 0.0003041^\circ T^2 + 0.0000051^\circ T^3 \\ \theta &= 0.5567530^\circ T - 0.0001185^\circ T^2 + 0.0000116^\circ T^3 \\ \xi &= 0.6406161^\circ T + 0.0000839^\circ T^2 + 0.0000050^\circ T^3 \end{aligned}\right\} \tag{3-1-5}$$

$T = t - t_0$ 是从标准历元 t_0 至观测历元 t 的儒略世纪数。这样，就完成坐标数据在协议地球坐标系(CTS)和协议天球坐标系(CIS)的转换。

3.1.2　时间系统及其相互关系

时间是物质存在和运动的基本形式之一，也是量度物质运动过程的基本参数，卫星作为一个高空观测目标，位置是不断变化的，因此在给出卫星运行位置的同时，必须给出相应的瞬间时刻。时间的测量，必须建立时间基准，即时间的单位(尺度)和原点(起始历元)。

根据时间基准的不同，卫星大地测量学中常用的时间系统有：世

界时系统、原子时系统、地球质心力学时系统、协调世界时系统和GPS时间系统。下面就不同的时间系统及其之间转换关系作一简单介绍。

(1)世界时系统

世界时系统是以地球自转为基础的时间系统。由于在观察地球自转时所选空间参考点的不同,世界时系统又包括恒星时、平太阳时和世界时。恒星时是以春分点为参考点,由春分点的周日视运动所确定的时间。恒星时在数值上等于春分点相对于本地子午圈的时角,所以恒星时具有地方性。平太阳时是与真太阳周年运动的平均速度相同的参考点在天球赤道上的运动定义的时间系统。平太阳时也具有地方性。世界时(UT)是以平子夜为零时起算的格林尼治平太阳时。世界时和平太阳时的关系为:(GAMT为平太阳相对格林尼治子午圈的时角)

$$UT = GAMT + 12\ h \tag{3-1-6}$$

世界时和平太阳时的尺度基准相同,但起算点不同。未经改正的世界时表示为UT0,引入极移改正$\Delta\lambda$和地球自转速度季节性改正ΔTS的世界时相应表示为UT1和UT2,其关系为:

$$UT1 = UT0 + \Delta\lambda \tag{3-1-7}$$

$$UT2 = UT1 + \Delta TS \tag{3-1-8}$$

(2)原子时系统(IAT)

原子时是以铯原子内部电子跃迁时辐射的电磁波的振荡频率为尺度依据的时间系统。原子时系统通过原子钟来守时和授时,国际原子时和UT2的关系为:

$$IAT = UT2 - 0.0039\ s \tag{3-1-9}$$

国际原子时的原点也由式(3-1-9)确定。

(3)地球质心力学时(TT)

地球质心力学时是建立在国际原子时基础之上的,其尺度和原子时的尺度一致。国际原子时(IAT)和地球质心力学时(TT)的严格定义如下:



$$TT = IAT + 32.184\ s \tag{3-1-10}$$

(4)协调世界时(UTC)

由于地球自转速度长期变慢的趋势，近几十年来，世界时每年比原子时约慢 1 s，两者之差逐年积累。为了避免发播的原子时与世界时之间产生过大的偏差，从 1972 年便采用了一种以原子时秒长为基础，在时刻上尽量接近世界时的一种时间系统，这种时间系统称为"协调世界时"(UTC)，简称为"协调时"。协调时的秒长严格等于原子时的秒长，采用闰秒(跳秒)的办法，使协调时与世界时的时刻相接近。当协调时与世界时的时刻差超过±0.9 s 时，便在协调时中加入一闰秒(正或负)。闰秒一般在 12 月 31 日或者 6 月 30 日末加入。具体日期由国际地球自转服务组织(IERS)通告。

协调时与原子时之间的关系由下式定义：

$$IAT = UTC + 1\ s \times n \tag{3-1-11}$$

其中，n 为调整参数，其值由国际地球自转服务(IERS)发布。

(5)GPS 时间系统

GPS 时间系统(GPST)是为精密导航和测量的需要建立的专用时间系统，由 GPS 主控站的原子钟控制。GPS 时属于原子时系统，其秒长严格等于原子时的秒长，但 GPS 时与国际原子时有不同的原点，GPS 时与 IAT 在任何一个瞬间有一常量偏差，其关系为：

$$IAT = GPST + 19\ s \tag{3-1-12}$$

GPS 时与协调时的时刻，规定于 1980 年 1 月 6 日 0 时相一致，其后，随着时间的积累两者之间的差别将表现为秒的整倍数。其关系为：

$$GPST = UTC + 1\ s \times n - 19\ s \tag{3-1-13}$$

3.2 卫星轨道理论简介

3.2.1 卫星轨道的一般理论

卫星发射并升至预定的高度后,开始围绕地球运行。假设地球为匀质的球体,在忽略摄动力影响的理想情况下运行轨道符合开普勒三定律。卫星的无摄运动,可以通过一组合适的参数来描述,这组参数的选择不是唯一的,但最常用的是开普勒轨道参数。这组参数包括:轨道椭圆的长半轴 a、轨道椭圆的偏心率 e、升交点赤径 Ω、轨道倾角 i、近地点角距 ω_s 和卫星的真近点角 f_s。以上 6 个参数所构成的坐标系统称为"轨道坐标系统"。在该系统中,6 个轨道参数一经确定,卫星在任一瞬间相对地球体的空间位置和速度就可以唯一确定。

卫星由于受到多种非地球中心引力的影响,其实际轨道偏离开普勒轨道,卫星在运行中,除受地球中心引力的作用外,还将受到以下摄动力的影响:

(1)地球体的非球形对称引起的作用力;

(2)太阳和月球的三体摄动力;

(3)太阳光的辐射压力;

(4)大气阻力;

(5)地球的潮汐力等。

在摄动力加速度的影响下,卫星运行的 6 个轨道参数都变为时间的函数。

3.2.2 CHAMP 卫星轨道的精密确定

精密轨道确定是 CHAMP 卫星观测资料用于重力场恢复的关键。CHAMP 卫星是利用星载双频 GPS 接收机进行测轨,其定轨方法主要有:动力法、约化动力法、几何法和约化几何法,这些方法确定



的 CHAMP 卫星轨道均能达到优于 5 厘米的精度。动力法可同时得到卫星的速度和位置，速度的精度优于 0.1 mm/s 的数量级。几何法轨道的速度可通过对位置差分得到，但精度不高。基于能量守恒方法恢复地球重力场模型对速度的精度相当敏感，利用该方法恢复地球重力场的关键是通过星载 GPS 观测值获得高精度的卫星速度。

3.3 星历数据和加速度数据

3.3.1 关于 CHAMP 卫星相关知识

CHAMP(Challenging Mini-satellite Payload)卫星由德国研发，于 2000 年 7 月 15 日升空，设计寿命为 5 年，其飞行速度为 420～470 千米/小时，大约 90 分钟绕地球飞行一周。CHAMP 卫星轨道倾角为 87.275 度的近极轨道，偏心率为 0.04，飞行轨道近似一个圆形，飞行高度为 430 千米左右的低轨运行。CHAMP 卫星采用高轨道 GPS 卫星跟踪低轨卫星(HL-SST)，是一颗探测地球重力场、电离层、对流层及地磁场的卫星。主要星载设备有 GPS 接收机、加速度仪、SLR 反射棱镜和地磁场测量仪等。由 CHAMP 卫星平台的 GPS 接收机和全球各 SLR 站的观测数据，可求出它的精密轨道。星载三轴加速度仪可以测定空气阻尼、太阳光压力等非保守力对卫星的作用。

3.3.2 CHAMP 卫星的轨道数据

CHAMP 卫星的状态向量(位置和速度)由 GFZ(德国地学中心)提供的轨道数据提取。CHAMP 轨道数据的标准格式由 CHORB (CHAMP orbit format)得到。后处理星历(PSO)的位置和速度数据是在协议地球参考系(CTS)中给出的。其数据格式的概略说明如下：

一组观测数据：

7385　441184000　2292820850　342518394　6380266978 69256489795 19471530292－25613927137　0 0 0 0 WD

7385　451184000　2361945296　361917445　6354247935 68990917099 19326229247－26423595076　0 0 0 0 WD

7385　461184000　2430799717　381170172　6327420929 68716444265 19178885455－27229837360　0 0 0 0 WD

7385　471184000　2499375229　400274546　6299789436 68433104240 19029530845－28032552829　0 0 0 0 WD

轨道数据说明：

Trajectory Record Description:

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

1 － 6 I6 Time tag (10 * * －1 d since J2000. 0)

7 － 17 I11 Time tag (10 * * －6 s since 0 hours)

18 － 29 I12 X coordinate of position (10 * * －3 m)

30 － 41 I12 Y coordinate of position (10 * * －3 m)

42 － 53 I12 Z coordinate of position (10 * * －3 m)

54 － 65 I12 X coordinate of velocity (10 * * －7 m/s)

66 － 77 I12 Y coordinate of velocity (10 * * －7 m/s)

78 － 89 I12 Z coordinate of velocity (10 * * －7 m/s)

90 － 96 I7 Roll angle (10 * * －3 deg)

97 － 103 I7 Pitch angle (10 * * －3 deg)

104 － 110 I7 Yaw angle (10 * * －3 deg)

111 － 115 I5 Neutral gas density (10 * * －16 g/cm * * 3)

116 A1 Maneuver flag (M = yes, else blank)

117 A1 Land/water flag (L = Land, W = Water)

118 A1 Ascending/descending arc flag (A = ascending, D = descending)

119 A1 Eclipse flag (E = satellite in Earth's shadow, else blank)

3.3.3　CHAMP 卫星的加速度数据

CHAMP 卫星的精密定轨以及利用星历数据推求重力场模型



都要用到加速度计数据，该数据的精度直接影响计算出的轨道或重力场模型的精度。GFZ 数据中心一般提供两种加速度数据产品：一种是给出统一尺度、偏差参数（尺度因子为 1，偏差参数为 0）的版本；二是未给出尺度因子和偏差参数，但两参数的值是固定不变的版本。

GFZ 数据中心提供的加速度是仪器系（Instrument Fixed System，IFX）下的加速度计数据。加速度计数据在使用时，首先在仪器系下利用标定好的偏差、尺度因子对加速度数据标校，然后将仪器系下的加速度值转换到惯性系（CIS）。而 CHAMP 加速度计数据给出的姿态数据是由星固系（S/C）到惯性系（CIS）的四元数转换参数。因此，我们首先将仪器系下的加速度计数据转换到星固系，再利用姿态数据将星固系下的加速度计数据转换到惯性系下。

加速度数据处理过程中几个应该注意的问题：

（1）由于加速度资料是通过电信号从 1 秒采样率的观测资料经过转换、改正、平滑等预处理结果，CHAMP 卫星加速度计数据存在尺度偏差和漂移，并且尺度因子和偏差参数是变化的，使用之前需要对数据进行加速度偏差、尺度因子的重新确定。

（2）加速度数据文件中给出的改正数与对应的观测时刻有 2 秒的滞后，可以利用线性内插的方法将加速度改正数归算到观测时刻。由于滞后时间较短，加速度改正数的归算与不归算的差值很小，实际计算中可以不进行加速度改正数的归算。归算与不归算的差值如此小的原因在于，在 2 秒的时间内，卫星所受非保守力的变化非常小，可忽略不计。

（3）姿态数据经常出现间断现象，间断一般持续几个到几十个历元不等，姿态数据需要内插计算，但间断在 15 个历元以上时，利用插值的姿态数据计算的非保守力加速度就要损失精度。在数据量过剩的情况下，对姿态数据间断处的数据也可以弃之不用。

（4）加速度计数据的尺度因子和偏差参数的重新标定目前通常采用的有两种方法：现有重力场模型标定法和卫星轨迹交叉点平差法。

(5)CHAMP 卫星加速度仪的一个电极出现故障,导致所测径向方向的加速度值出现大的偏差。因此若径向方向的加速度观测值未得到合理的处理,计算耗散能量会产生较大的误差。由于耗散能量主要由沿迹方向的非保守力引起,而沿迹方向的非保守力正好由加速度仪沿迹方向的分量 a_y 测得。目前国外许多学者建议仅利用 a_y 估计非保守力能量损失,而加速度计数据的标定也仅对沿迹分量进行标校。

加速度数据的偏差、尺度因子进行重新标定和从仪器固定系转换到惯性系的具体过程和方法,将在后面章节专门讨论。

3.4 加速度数据标校参数的确定

由于加速度资料是通过电信号转换得到的,因此其偏差和尺度因子不是绝对的,从 GFZ 获得的加速度数据是经过初步处理的,还需要对尺度因子及偏差参数进行重新标定。目前通常采用两种方法对尺度因子及偏差参数进行重新标定:现有重力场模型标定法和卫星轨迹交叉点平差法。现分别对这两种方法作一介绍。

3.4.1 现有重力场模型标定加速度数据尺度因子及偏差参数

利用现有重力场模型标定加速度数据的基本原理是:基于能量守恒方程,利用现有重力场模型计算卫星高度处的扰动位,进而计算尺度因子、偏差参数。卫星在运动中,总的能量是保持不变的,卫星的动能和势能之和为一常量。由于卫星同时受到大气阻力、太阳光压力等非保守力的影响,卫星的能量会有损失(转化为其他形式的能量,比如热能等)。卫星在惯性系下的能量守恒方程可以写为:

$$V=\frac{1}{2}\vec{v}^2-V_{\mathrm{sun}}-V_{\mathrm{moon}}-\vec{\omega}(xv_y-v_xy)-\int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-E_0 \quad (3\text{-}4\text{-}1)$$

式中,V 为地球的引力位;$\frac{1}{2}\vec{v}^2$ 为惯性系中卫星的动能项;V_{sun},



V_{moon} 分别为日、月的引力位函数；$\vec{\omega}(xv_y - v_x y)$ 为由于地球自转引起的位旋转效应；$\int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot \vec{v} dt$ 为非保守力引起的耗散能量；E_0 为卫星体系的能量常量。

假定偏差参数、尺度因子分别为 k_0，k_1，如果仅对加速度沿迹方向的分量进行标校，则方程(3-4-1)可改写成如下形式：

$$\int |\vec{v}| (k_0 + k_1 a_y) dt = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - V_{sun} - V_{moon} - \vec{\omega}(xv_y - v_x y) - E_0 - V \tag{3-4-2}$$

利用现有的重力场模型如 EGM96 或者最新公布的 EIGEN-CG01C 等可以计算地球的引力位 V，日、月引力 V_{sun}，V_{moon} 可以通过计算模型求得。对于一个确定的卫星位置，式(3-4-2)右端的所有项都有具体的数值对应。令右式为 L，假定有 n 个观测历元，其对应的观测时刻为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，则离散化的观测方程为：

$$\left.\begin{aligned} &|\vec{v}(t_1)|[k_0 + k_1 a_y(t_1)] \cdot \Delta t = L(t_1) \\ &|\vec{v}(t_1)|[k_0 + k_1 a_y(t_1)] \cdot \Delta t + |\vec{v}(t_2)|[k_0 + k_1 a_y(t_2)] \cdot \Delta t = L(t_2) \\ &\vdots \\ &|\vec{v}(t_1)|[k_0 + k_1 a_y(t_1)] \cdot \Delta t + \cdots + |\vec{v}(t_n)|[k_0 + k_1 a_y(t_n)] \cdot \Delta t = L(t_n) \end{aligned}\right\} \tag{3-4-3}$$

联立上述方程便可以估计尺度因子和偏差参数。但是，上述观测方程无论从形式上还是计算上都较为复杂；另外，公式中的未知积分常量 E_0 还需确定，而该常量的确定通常是利用扰动位全球积分为零的特性求的，较为复杂，通常只能取近似值。为了克服上述问题，现在采用相邻历元间差分方法对方程组(3-4-3)进行简化，差分后的观测方程为：

$$\left.\begin{aligned} k_0 + k_1 a_y(t_2) &= \widetilde{L}(t_2) \\ k_0 + k_1 a_y(t_3) &= \widetilde{L}(t_3) \\ &\vdots \\ k_0 + k_1 a_y(t_n) &= \widetilde{L}(t_n) \end{aligned}\right\} \tag{3-4-4}$$

式中，$\widetilde{L}(t_i) = \dfrac{L(t_i) - L(t_{i-1})}{|\vec{v}(t_{i-1})| \cdot \Delta t}$ $(i = 2,3,\cdots,n)$。

经过上述差分，积分常量 E_0 已经消去，而且方程也大为简化。由此可以列出误差方程：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L} \tag{3-4-5}$$

式中，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_y(t_2) \\ 1 & a_y(t_3) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_y(t_n) \end{bmatrix}$；$\hat{\boldsymbol{X}} = (k_0, k_1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \widetilde{L}(t_2) \\ \widetilde{L}(t_3) \\ \vdots \\ \widetilde{L}(t_n) \end{bmatrix}$。

尺度因子和偏差参数的最小二乘估计公式为：

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{3-4-6}$$

由式(3-4-6)便可以估计出尺度因子和偏差参数。如果仅需要确定其中一个参数，如偏差参数，则可令尺度因子为 1 或 GFZ 数据中心提供的参数值，代入式(3-4-5)，可估计偏差参数。若仅估计尺度因子，则偏差值取 GFZ 提供的参数值，代入方程，可求解尺度因子。

上述标定过程中，标校参数对先验重力场模型的选择并不敏感，因而受先验重力场模型的影响不大。

3.4.2 卫星轨迹交叉点标定加速度数据尺度因子及偏差参数

仅对加速度沿迹方向的分量进行标校，CHAMP 卫星在运行过程中的能量守恒方程为：



$$V = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - V_{\text{sun}} - V_{\text{moon}} - \vec{\omega}(xv_y - v_x y) - \int_{t_0}^{t} |v| \cdot a_y \mathrm{d}t - E_0 \tag{3-4-7}$$

将上式改写为：

$$T = \bar{T} - \int_{t_0}^{t} |v| \cdot a_y \mathrm{d}t - E_0 \tag{3-4-8}$$

式中，T 为卫星高度处的扰动位；$\bar{T} = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - V_{\text{sun}} - V_{\text{moon}} - \vec{\omega}(xv_y - v_x y) - U_0$，$U_0$ 为地球重力场正常位(不包括离心力位)。

在卫星上升弧段与下降弧段的交叉点处，卫星高度处的扰动位应该相同(扰动位仅与卫星的位置有关)，因此，交叉点处扰动位的不符值可理解为非保守力加速度数据偏差和尺度差异。以标记 as(ascend)表示上升，以 des(descend)表示下降，t_{as} 表示上升时刻，t_{des} 表示下降时刻，则在交叉点处有：

$$\bar{T}^{\text{as}} - \int_{t_0}^{t_{\text{as}}} |v| \cdot a_y \mathrm{d}t - E_0 = \bar{T}^{\text{des}} - \int_{t_0}^{t_{\text{des}}} |v| \cdot a_y \mathrm{d}t - E_0 \tag{3-4-9}$$

简化后可得：

$$\int_{t_{\text{as}}}^{t_{\text{des}}} |v(t)| \cdot a_{y(t)} \mathrm{d}t = \Delta T, \quad t_{\text{as}} < t_{\text{des}} \tag{3-4-10}$$

式中，$\Delta T(t) = \bar{T}^{\text{des}} - \bar{T}^{\text{as}}$。当 $t_{\text{as}} > t_{\text{des}}$ 时，式(3-4-10)两端同时变负号。为讨论方便，假定 $t_{\text{as}} < t_{\text{des}}$，并不影响最后的结论。

假定偏差参数、尺度因子分别为 k_0，k_1，在有 n 个轨道交叉点的情况下，方程可以列为：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_{\text{as}}(1)}^{t_{\text{des}}(1)} |v(t)| \cdot [k_0 + k_1 a_{y(t)}] \mathrm{d}t = \Delta T_1 \\
&\int_{t_{\text{as}}(2)}^{t_{\text{des}}(2)} |v(t)| \cdot [k_0 + k_1 a_{y(t)}] \mathrm{d}t = \Delta T_2 \\
&\qquad\vdots \\
&\int_{t_{\text{as}}(n)}^{t_{\text{des}}(n)} |v(t)| \cdot [k_0 + k_1 a_{y(t)}] \mathrm{d}t = \Delta T_n
\end{aligned}\right\} \tag{3-4-11}$$

上式为积分形式，在实际计算中必须进行离散化，可以根据加速度数据的采样率（间隔 10 秒）进行离散化处理。设在第 i 个交叉点对应的升弧和降弧观测时刻分别为 $t_{as}(i)$ 和 $t_{des}(i)$，在 $t_{as}(i) \sim t_{des}(i)$ 中包含 m_i 个观测历元，对应的观测时刻为 $t_{m_i}(1), t_{m_i}(2), \cdots, t_{m_i}(m_i)$，则第 i 个观测方程的离散化形式为：

$$\begin{aligned}&|v(t_{as}(i))|(k_0 + k_1 a_y(t_{as}(i))) \cdot (t_{m_i}(1) - (t_{as}(i)) + \\ &\sum_{j=1}^{m_i} |v(t_{m_i}(j))|(k_0 + k_1 a_y(t_{m_i}(j))) \cdot \Delta t + |v(t_{m_i}(m_i))| \\ &(k_0 + k_1 a_y(t_{m_i}(m_i))) \cdot (t_{des}(i) - t_{m_i}(m_i)) = \Delta T_i\end{aligned} \tag{3-4-12}$$

式中，Δt 为采样时间间隔（对 CHAMP 卫星轨道数据，取 10 秒）。

式(3-4-12)左端第一项和最后一项是考虑到交叉点时刻通常与观测时刻不重合时的积分项，而中间项是按数据采样间隔进行离散化处理。公式(3-4-11)和对应的离散化公式(3-4-12)可以用来估计尺度因子和偏差参数。

利用卫星轨迹交叉点确定尺度因子和偏差参数需要注意的几个问题：

(1)交叉点处的位置一般和观测时刻的位置不重合，因此，需要将扰动位进行向上或者向下延拓。CHAMP 卫星的高度在 400～460 千米内变化，在较小的高度变化中，可以将扰动位进行泰勒展开，取至二次项即可达到精度要求。其公式为：

$$T = T_0 + (\frac{\partial T_0}{\partial r}\Delta h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2}\Delta h^2) \tag{3-4-13}$$

(2)为保证有足够多的交叉点，同时也为计算方便，可先将得到的扰动位序列向上或者向下延拓到一个相同的卫星高度（如 430 千米高度）处，这样得到的观测值是在圆形轨道上，此时交叉点数最多。

(3)在进行延拓计算时，可采用现有的 EGM96 或最新公布的 EUGEN 系列重力场模型。因其量级较小，不会影响计算精度。

(4)交叉点处的非保守力加速度可采用内插或外推的方法计算



得到。

卫星轨迹交叉点平差方法确定加速度数据尺度因子及偏差参数,涉及交叉点的求解、交叉点处非保守力加速度数据的内插或外推以及扰动位的延拓处理等计算,计算过程比较复杂。该方法的突出优点是对先验重力场信息的依赖性较弱。

3.5 计算惯性系下的非保守力摄动加速度

如何利用GFZ数据中心提供的姿态四元数由加速度计坐标系下的加速度值得到惯性系下的非保守力加速度是本节讨论的重点问题。

3.5.1 CHAMP卫星的姿态数据的获取

CHAMP卫星是由一个横截面为梯形的六面体主星体和一个柱型长臂组成。卫星姿态数据是由高级恒星相机ASC(Advanced Stellar Compass)来测量的。CHAMP星载的有两组高级恒星相机设备,一个安装在卫星长臂上(ASC-A),另一个安装在飞行器体上(ASC-B),后者用于确定星载仪器的姿态。每个ASC都有两个相机头单元CHU_i(标记i从1到4,1～2代表ASC-A的数据,3～4代表ASC-B的数据)。CHU_i有自己的参考系——恒星罗盘参考系。恒星相机相对星体坐标系并不是绝对固定的,他们之间的转换要通过CR(公共参考框架)来进行。CR参考框架固连于卫星星体上,坐标系三轴x_{CF},y_{CF},z_{CF}分别为两个恒星敏感器对应轴的指向的平均值方向。CR可以应用三个欧勒角($\Phi=0.20°$, $\Theta=0.20°$, $\Psi=0.96°$)转换到星固体系。由于长臂弯曲,转角可能有百分之几度的变化。

卫星姿态的确定过程是通过高级恒星相机对Hipparcos得到的恒星群的观测,确定恒星相机参考系相对于地心惯性系的相互关系,然后利用恒星相机参考系和星固系之间的关系确定星固系相对于惯

性系的姿态四元数。

3.5.2 相关坐标系的定义

(1)加速度仪参考系(IFX)

加速度仪参考系(IFX)是仪器固定的。其坐标原点位于加速度仪的检测质量中心，一般情况下和星体重心高精度重合；加速度仪参考系的 x_{ACC} 平行于星体参考系 $z_{S/C}$，正方向沿 $z_{S/C}$ 的反方向；y_{ACC} 轴平行于 $x_{S/C}$ 的方向；z_{ACC} 平行于 $y_{S/C}$ 但方向相反。但是，加速度仪参考系和星体参考系的轴向不是完全重合的，其轴向之间还存在三个微小转角，我们用 Φ 表示 $z_{S/C}$ 与 x_{ACC} 的夹角，Θ 表示 $x_{S/C}$ 与 y_{ACC} 的夹角，Ψ 表示 $y_{S/C}$ 与 z_{ACC} 的夹角。由于这三个角度一般很小，目前 CHAMP 加速度计数据中还未提供这三个角度参数，实际中其影响一般忽略不计。

(2)星体参考系(S/C)

星体参考系是相对星体固定的，其坐标原点在卫星重心；星体参考系的 $x_{S/C}$ 轴平行于长臂的轴线，正方向指向飞行方向；$y_{S/C}$ 轴和 $x_{S/C}$，$z_{S/C}$ 形成右手系；$z_{S/C}$ 指向天底(地球质心方向)。

3.5.3 三轴姿态的确定

(1)欧勒轴和角表示的转换矩阵

当刚体做定点转动时，我们可以采用多种方法来表示这个转动，最常用的有方向余弦、欧勒角、欧勒轴和角、欧勒系统参数四元数等方法。向量在不同坐标系间的坐标转换也可以由一个旋转轴矢量和一个旋转角来表示。我们设在两个不同坐标系 $o\text{-}xyz$ 和 $o\text{-}x'y'z'$ 间做一旋转，旋转轴的单位矢量为 (e_x, e_y, e_z)，绕这个轴的旋转角为 φ。$o\text{-}xyz$ 坐标系下任何一个矢量都可以通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转换到 $o\text{-}x'y'z'$。则方向余弦矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为：



$$
A = \begin{pmatrix} \cos\varphi + e_x^2(1-\cos\varphi) & e_x e_y(1-\cos\varphi) + e_z\sin\varphi & e_x e_z(1-\cos\varphi) - e_y\sin\varphi \\ e_x e_y(1-\cos\varphi) - e_z\sin\varphi & \cos\varphi + e_y^2(1-\cos\varphi) & e_y e_z(1-\cos\varphi) + e_x\sin\varphi \\ e_x e_z(1-\cos\varphi) + e_y\sin\varphi & e_y e_z(1-\cos\varphi) - e_x\sin\varphi & \cos\varphi + e_z^2(1-\cos\varphi) \end{pmatrix} \tag{3-5-1}
$$

(2)欧勒系统参数四元数表示的转换矩阵

同样,我们设在两个不同坐标系 $o\text{-}xyz$ 和 $o'\text{-}x'y'z'$ 间做一旋转,旋转轴的单位矢量为 $\boldsymbol{e}(e_x, e_y, e_z)$,其中 e_x, e_y, e_z 分别为轴方向的方向余弦,绕这个轴的旋转角为 φ,欧勒系统参数四元数的定义为:

$$
\left.\begin{aligned} q_1 &= e_x \sin\frac{\varphi}{2} \\ q_2 &= e_y \sin\frac{\varphi}{2} \\ q_3 &= e_z \sin\frac{\varphi}{2} \\ q_4 &= \cos\frac{\varphi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{3-5-2}
$$

式中,q_1, q_2, q_3 是四元数的三个矢量分量;q_4 是四元数的标量分量。这四个欧勒系统参数不是独立的,满足关系式:$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$。

由欧勒系统参数四元数表示的方向余弦矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为:

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \tag{3-5-3}
$$

这个转换矩阵(3-5-3)和矩阵(3-5-1)是等价的。

3.5.4 惯性系下非保守力加速度的计算

(1)加速度数据的标校

由于加速度资料是通过电信号从1秒采样率的观测资料经过转换、改正、平滑等预处理的结果,使用之前需要对数据进行加速度偏差、尺度因子的修正。GFZ数据中心提供的CHAMP加速度计数据文件中给出了用于标校的参数,包括加速度改正数(洛仑兹力改正和模型改正)、尺度因子和偏差参数。有了这些参数可根据以下公式对加速度计数据进行标校:

$$a_{ci} = k_i(a_i + c_i + da_{1i} + da_{2i}),\ i=1,2,3 \tag{3-5-4}$$

式中,a_{ci} 为经过标校后的第 i 个方向上的加速度;k_i 为第 i 个方向上的加速度尺度因子;a_i 为第 i 个方向上的加速度观测值;c_i 为第 i 个方向上的加速度偏差参数;da_{1i} 为第 i 个方向上的洛仑兹力改正;da_{2i} 为第 i 个方向上的模型改正加。必须指出的是,加速度数据文件中给出的改正数通常与对应的观测时刻不同步,有2秒的滞后,可以用线性内插方法把加速度改正数归算到观测时刻。

(2)加速度数据转换到惯性坐标系

首先,我们把加速度数据由仪器系转换到星固系,顾及两坐标系统间的三个微小转角的转换矩阵为:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\mathrm{S/C}} = \boldsymbol{R}_y(\Psi)\boldsymbol{R}_x(-90^\circ - \Theta)\boldsymbol{R}_z(90^\circ + \Phi) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\mathrm{IFX}} \tag{3-5-5}$$

式中,Φ,Θ,Ψ 为仪器系和星固系两坐标系间相应坐标轴不平行而引起的微小转角,由于三个角度很小,实际中其影响可以忽略不计,所以我们采用以下矩阵实现仪器系到星固系的转换:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\mathrm{S/C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\mathrm{IFX}} \tag{3-5-6}$$



CHAMP 加速度计数据中给出的姿态是由星固系到惯性系的四元数，定义为：

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^{\mathrm{T}} \tag{3-5-7}$$

式中，q_1, q_2, q_3 为四元数的三个矢量分量；q_4 为四元数的标量分量。

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$为四元数表示的坐标变换矩阵，由式(3-5-3)给出。有了坐标变换矩阵后，由星固系到惯性系的转换可由下面的公式完成：

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\mathrm{CIS}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\mathrm{S/C}} \tag{3-5-8}$$

这样得到的加速度值即为惯性系下的非保守力加速度。

3.6　线性插值姿态数据对惯性系下非保守力加速度数据的影响

CHAMP 加速度计数据给出了由星固系(S/C)到惯性系的转换姿态四元数数据。但是 GFZ 数据中心提供的加速度数据文件中的姿态数据经常出现间断，一般间断几个历元至几十个历元不等。为保持观测数据的连续性，我们可以对间断数据采用线性插值法进行恢复。为了谨慎使用数据，避免较大误差对精密定轨和重力场恢复的结果带来影响，下面对线性插值姿态数据对惯性系下非保守力加速度数据的影响作详细分析。

3.6.1　姿态间断数据的统计

利用 2003 年 1 月～10 月随机抽取的不连续的 12 天的数据进行分析如表 3-1 所示，由于数据的抽取是随机的，所以结果具有普遍性。在所抽取的数据中姿态数据间断次数最大为 110 次，间断最大历元数为 33。

表 3-1　　姿态数据间断情况统计

日期	姿态数据间断次数	间断最大历元数	间断平均历元数
2003.01.04	20	12	1.90
2003.01.08	3	5	2.66
2003.01.30	6	4	1.83
2003.03.03	13	3	2.08
2003.03.09	28	3	1.82
2003.07.25	6	7	2.83
2003.08.08	110	33	7.25
2003.09.26	12	11	3.63
2003.10.20	10	2	1.20
2003.10.21	9	3	1.67
2003.10.25	13	5	1.85
2003.10.27	17	3	2.24

3.6.2　姿态数据的日变化性质分析

分别绘制随机抽取的不连续的 12 天的姿态数据四个元素在每一天的变化曲线，姿态数据的变化呈周期性的曲线变化，每个姿态数据的四个元素变化到达极值点的历元并不相同，也没有发现它们之间的固定关系，姿态四元数变化的周期也不相同。以 2003 年 10 月 20 日的姿态数据为例，四个元素变化曲线绘制如图 3-1 至图 3-4 所示(横坐标为历元数，纵坐标为姿态四元数值)。



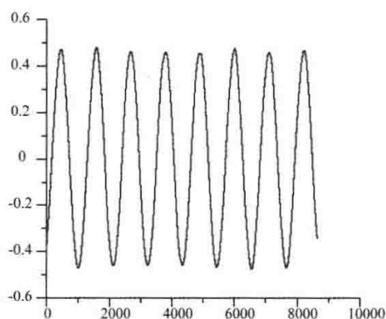


图 3-1 2003.10.20q_1 的日变化

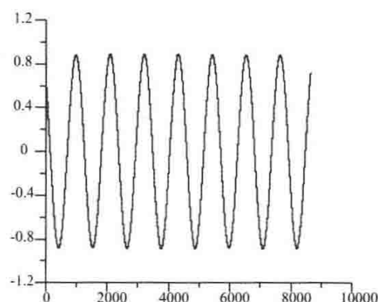


图 3-2 2003.10.20q_2 的日变化

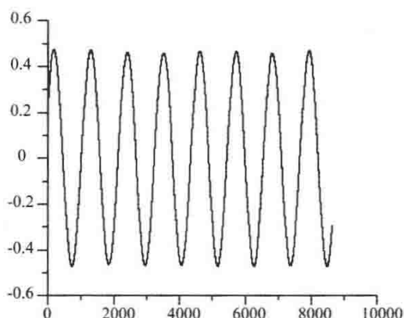


图 3-3 2003.10.20q_3 的日变化

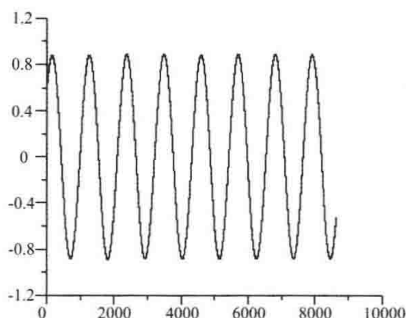


图 3-4 2003.10.20q_4 的日变化

从图中可以看到,姿态数据四个元素是呈曲线变化的。由于卫星运行过程中受外界的干扰条件很多,其姿态变化也有不确定因素,姿态数据四个元素的变化曲线也有局部的扰动。从上面对姿态数据四个元素的变化性质分析可以知道,姿态数据四个元素的变化不是线性的,对姿态数据作线性插值必然会影响计算非保守力加速度的精度,精度损失最大的地方应该在姿态数据变化的转点处。

我们在随机抽取的姿态数据段和姿态数据变化转点的数据连续段对姿态数据作内插处理,利用内插的姿态数据计算出的惯性系下的非保守力加速度与正常姿态数据计算的结果进行比较,进一步判断当姿态数据间断时间达到多大时,对姿态数据作线性插值基本不

影响计算非保守力加速度的精度。

3.6.3 线性插值的精度分析

GFZ 提供的 CHAMP 卫星加速度数据的标称精度为：切向加速度的测定精度为 5.0×10^{-6} mm/s^2，径向与法向加速度的测定精度为 5.0×10^{-5} mm/s^2。在所给定加速度数据中随机抽取 1 月 4 日、1 月 28 日、6 月 10 日、10 月 20 日四天的数据，由于精度损失最大的地方应该在姿态数据变化的转点处，所以我们选取的姿态数据四个元素中的一个达到转点时的数据连续段，分别作 10 个间断进行姿态数据线性内插，间断历元数分别为 5、10、15、20。线性内插得到的姿态数据计算得到惯性系下的非保守力加速度与正常数据计算的结果比较如表 3-2 所示。

表 3-2　姿态数据间断的影响

（10 s 采样间隔，间断时间＝间断历元数×10 s）（单位：mm/s^2）

日期	间断历元数	加速度分量	结果差最大值	结果差均值	结果差标准差	最大值量级与加速度标称精度比较
2003.1.4	5	a_{x_1}	5.411295×10^{-6}	-3.59306204×10^{-6}	5.3010582×10^{-6}	相当
		a_{y_1}	5.090827×10^{-6}	2.95178×10^{-7}	1.551455×10^{-6}	相当
		a_{z_1}	1.4121621×10^{-5}	-1.79132754×10^{-6}	9.06855858×10^{-6}	相当
2003.1.28	10	a_{x_1}	5.0039588×10^{-5}	2.89238029×10^{-6}	3.21036859×10^{-5}	相当
		a_{y_1}	1.3497053×10^{-5}	4.19005032×10^{-6}	4.59073535×10^{-6}	略大
		a_{z_1}	3.6823407×10^{-5}	-4.63223493×10^{-6}	1.84028615×10^{-5}	相当



续表

日期	间断历元数	加速度分量	结果差最大值	结果差均值	结果差标准差	最大值量级与加速度标称精度比较
2003.6.10	15	a_{x_1}	11.9953848×10^{-5}	$-2.559279148\times10^{-5}$	6.672753614×10^{-5}	大于
		a_{y_1}	2.9370687×10^{-5}	7.09533201×10^{-6}	7.58076075×10^{-6}	大于
		a_{z_1}	0.000113319607	4.022779566×10^{-6}	4.129561831×10^{-5}	大于
2003.10.20	20	a_{x_1}	0.00016551135	3.37507904×10^{-5}	0.0001034806805	大于
		a_{y_1}	6.3718492×10^{-5}	1.04787971×10^{-5}	2.67495346×10^{-5}	大于
		a_{z_1}	0.000202161561	1.447907587×10^{-5}	0.0001043188661	大于

我们可以看出，在姿态间断数据小于 5 个历元的情况下，姿态数据线性插值对于计算非保守力加速度的影响小于 CHAMP 卫星加速度数据的标称精度，对姿态数据间断处作线形插值是安全的。在姿态间断数据为 10 个历元的情况下，姿态数据线性插值计算非保守力加速度的影响的最大值略大于 CHAMP 卫星加速度数据的标称精度，而影响的数量级与标称精度基本相同。在姿态间断数据大于 15 个历元的情况下，姿态数据线性插值对于计算的非保守力加速度的最大值量级大于 CHAMP 卫星加速度数据的标称精度的量级。

3.6.4　姿态数据随机数据段的插值精度分析

选取姿态数据随机数据段，分别作 10 个间断为 5、10、15、20 个历元的数据进行姿态数据线性内插，线性内插得到的姿态数据计算得到惯性系下的非保守力加速度与原始数据计算的结果进行比较，其差值的统计结果略好于表 3-2 的统计结果，数量级是相同的，说明作姿态数据线形插值计算的精度和数据选取的位置关系不大，仅和

卫星姿态数据的质量有关。

3.6.5 结论

对于姿态数据间断在10个历元以下时，线性插值姿态数据对于计算惯性系下非保守力加速度影响不大，可以内插姿态数据。但在姿态间断数据大于15个历元时，需要精密计算非保守力加速度时就需要谨慎处理，不能作简单的内插计算姿态数据。

由于卫星的姿态数据受很多因素的影响，其质量随时间和空间位置的变化而不同，以上给出的结论仅是分析的概略值。

第 4 章　能量守恒方法恢复 CHAMP 地球重力场

4.1　能量守恒方程在不同坐标系的表达与统一

能量守恒法恢复地球重力场模型,也就是确定地球引力场的位系数。组成解算方程组的关键在于建立卫星的引力势能和状态向量(位置和速度向量)间的关系,即建立能量守恒方程式。能量守恒方程可以从卫星的运动方程推导,也可以从经典力学的方法完全用数学分析的方法推导出。现在我们就用经典力学的方法给出重力卫星的能量守恒方程式。

首先,建立地心惯性参考系 o_i-$x_iy_iz_i$,原点 o_i 位于地球质心, x_i 轴指向 J2000.0 时平春分点, z_i 轴垂直于平赤道, y_i 轴与 x_i 轴和 z_i 轴构成右手坐标系。这个坐标系是不受地球旋转影响的空固坐标系,是近似程度相当好的惯性坐标系。其次,建立一个与地球体相固连的坐标系 o_e-$x_ey_ez_e$,其原点 o_e 与地球质心重合, z_e 轴指向协议地极 CIO, x_e 轴指向格林尼治平子午面和地球赤道面的交点, y_e 轴与 x_e 轴和 z_e 轴构成右手坐标系。这个坐标系随地球一起以角速度 $\vec{\omega}$ 旋转,为地固坐标系。

我们假定卫星质量为单位质量,确定卫星在惯性系中的位置需要知道三个坐标 (x_i,y_i,z_i) 。将卫星看作单质点,这个单质点的力学体系受到零个几何约束,所以这个力学体系的自由度为 3 。惯性

系的坐标 (x_i, y_i, z_i) 可以用地固系中的坐标 (x_e, y_e, z_e) 及时间 t 表示，即有关系式：

$$\begin{cases} x_i = x_i(x_e, y_e, z_e, t) \\ y_i = y_i(x_e, y_e, z_e, t) \\ z_i = z_i(x_e, y_e, z_e, t) \end{cases} \tag{4-1-1}$$

地固系的坐标 (x_e, y_e, z_e) 也是独立的，我们看作拉格朗日广义坐标。

如果卫星在 $o_e\text{-}x_e y_e z_e$ 坐标系的相对速度向量为 v，则卫星在坐标系 $o_i\text{-}x_i y_i z_i$ 中的绝对速度向量 $\vec{v}_i = \vec{v}_e + \vec{\omega} \times \vec{r}$ 为：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\vec{\omega} y_e \\ \vec{\omega} x_e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_e - \vec{\omega} y_e \\ \dot{y}_e + \vec{\omega} x_e \\ \dot{z}_e \end{pmatrix} \tag{4-1-2}$$

式中，$(\dot{x}_e, \dot{y}_e, \dot{z}_e)$ 是由卫星精密轨道数据提供的地心地固坐标系下的速度向量。

所以卫星的动能为：

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2 + z_e^2) + \vec{\omega}(x_e \dot{y}_e - y_e \dot{x}_e) + \frac{1}{2}\vec{\omega}^2(x_e^2 + y_e^2) \tag{4-1-3}$$

卫星体系的哈密顿(Hamiltonian)函数 H 为：

$$H = -L + (p_{x_e}\dot{x}_e + p_{y_e}\dot{y}_e + p_{z_e}\dot{z}_e) \tag{4-1-4}$$

卫星单质点力学体系内受到零个几何约束，约束反力对其不做功，我们认为这个力学体系为稳定系。哈密顿函数是体系的特征函数，在这个力学体系中，哈密顿函数就是体系的动能和势能之和，即体系的总能量。式(4-1-4)中 L 为拉格朗日(Lagrangian)函数，表示卫星体系的动能与势能差，即 $L = T - U$。拉格朗日函数也是卫星体系的特性函数，表征约束、运动状态、相互作用等性质。$(p_{x_e}, p_{y_e},$



p_{z_e}）表示广义动量，分别等于：

$$\begin{cases} p_{x_e} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_e} = \dot{x}_e - \vec{\omega} y_e \\ p_{y_e} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}_e} = \dot{y}_e + \vec{\omega}_e \\ p_{z_e} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}_e} = \dot{z}_e \end{cases} \tag{4-1-5}$$

将式(4-1-3)与式(4-1-5)代入式(4-1-4)得：

$$H = -(T-U) + (p_{x_e}\dot{x}_e + p_{y_e}\dot{y}_e + p_{z_e}\dot{z}_e)$$

即：

$$H - U = \frac{1}{2}(\dot{x}_e^2 + \dot{y}_e^2 + \dot{z}_e^2) - \frac{1}{2}\vec{\omega}^2(x_e^2 + y_e^2) \tag{4-1-6}$$

又由 $\vec{v}_e = \vec{v}_i - \vec{\omega} \times \vec{r}$ 和 $x_e^2 + y_e^2 = x_i^2 + y_i^2$ 得：

$$H - U = \frac{1}{2}[(\dot{x}_i + \vec{\omega} y_i)^2 + (\dot{y}_i - \vec{\omega} x_i)^2 + \dot{z}_i^{\ 2}] - \frac{1}{2}\vec{\omega}^2(x_i^2 + y_i^2)$$

化简为：

$$H - U = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \vec{\omega}(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) \tag{4-1-7}$$

假如我们选取无穷远处为零势能点，卫星的势能 U 和引力位 V 数值相等，符号相反。由于卫星的总能量守恒，我们认为卫星所具有的总能量为 E_0 。在以上推导过程中我们没有考虑非保守力加速度的影响。事实上，由于卫星在运行过程中同时受空气阻尼、太阳光压力等非保守力对卫星的作用，总能量 E_0 不再是一个常量，必须加一个能量损失项 $\int_{t_0}^{t} \vec{a}_e \cdot \vec{v}_e \mathrm{d}t$ 。这里 $\vec{a}_e$ 和 $\vec{v}_e$ 分别为地固框架下的加速度和速度向量。引力位 V 的数值包含有日(月)在卫星位置的摄动位和日(月)的引潮力附加位。在 V 中分离出日(月)的摄动位和引潮力附加位。这样式(4-1-6)在地固框架下变为：

$$V=\frac{1}{2}\vec{v}_{\mathrm{e}}^{2}-V_{\mathrm{sun}}-V_{\mathrm{moon}}-\frac{1}{2}\vec{\omega}^{2}(x_{\mathrm{e}}^{2}+y_{\mathrm{e}}^{2})-\int_{t_0}^{t}\vec{a}_{\mathrm{e}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{e}}\mathrm{d}t-E_0 \tag{4-1-8}$$

式中，V 为地球的引力位函数；$\frac{1}{2}\vec{v}_{\mathrm{e}}^{2}$ 为地固系的动能项；V_{sun}，V_{moon} 分别为日、月的引力位函数；$\frac{1}{2}\vec{\omega}^{2}(x_{\mathrm{e}}^{2}+y_{\mathrm{e}}^{2})$ 为离心力位项；$\int_{t_0}^{t}\vec{a}_{\mathrm{e}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{e}}\mathrm{d}t$ 为非保守力引起的耗散能量；E_0 为卫星体系的能量常量。式(4-1-8)即卫星在地固系下的能量守恒方程。

如果记 $\vec{a}_{\mathrm{i}}$ 和 $\vec{v}_{\mathrm{i}}$ 为惯性系下的加速度和速度向量，卫星在惯性系下的能量守恒方程为：

$$V=\frac{1}{2}\vec{v}_{\mathrm{i}}^{2}-V_{\mathrm{sun}}-V_{\mathrm{moon}}-\vec{\omega}(x_{\mathrm{i}}\dot{y}_{\mathrm{i}}-\dot{x}_{\mathrm{i}}y_{\mathrm{i}})-\int_{t_0}^{t}\vec{a}_{\mathrm{i}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{i}}\mathrm{d}t-E_0 \tag{4-1-9}$$

式中，V 为地球的引力位函数；$\frac{1}{2}\vec{v}_{\mathrm{i}}^{2}$ 为惯性系的动能项；V_{sun}，V_{moon} 分别为日、月的摄动位和引潮力附加位函数；$\vec{\omega}(x_{\mathrm{i}}\dot{y}_{\mathrm{i}}-\dot{x}_{\mathrm{i}}y_{\mathrm{i}})$ 为由于地球自转引起的位旋转效应；$\int_{t_0}^{t}\vec{a}_{\mathrm{i}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{i}}\mathrm{d}t$ 为非保守力引起的耗散能量；E_0 为卫星体系的能量常量。

4.2 日、月对卫星的三体摄动位和引潮力附加位的计算

上节已经得到卫星在惯性系下顾及地球自转和非保守力能量损耗的能量守恒方程，惯性系下可表示为：

$$V=\frac{1}{2}\vec{v}^{2}-V_{\mathrm{sun}}-V_{\mathrm{moon}}-\vec{\omega}(xv_y-v_xy)-\int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-E_0 \tag{4-2-1}$$

式中，V 为地球引力位(不包括离心力位)；卫星在惯性系下的位置



矢量为 $\vec{x}=(x,y,z)$，速度矢量为 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$；$\frac{1}{2}\vec{v}^2$ 为单位质量卫星的动能；V_{sun} 和 V_{moon} 分别为太阳和月球产生的引潮力位和引潮力附加位；$\vec{\omega}$ 为地球自转角速度；$\vec{\omega}(xv_y-v_xy)$ 为地球自转引起的位旋转效应；$\int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t$ 为非保守力引起的能量耗散(Energy Dissipation)；E_0 为能量积分常量。公式(4-2-1)是利用能量方法恢复地球重力场模型的基本方程。

卫星除受地球引力外还受到其他保守力的作用，其中影响最大的是日、月摄动力。卫星在运动的过程中，引起卫星速度变化的不只是地球重力势能的变化，还包括日、月摄动位的变化。所以，基于能量守恒方法恢复地球重力场必须考虑卫星的日、月三体摄动位的变化，才能得到卫星高度处的扰动位时间序列，建立扰动位与重力场位系数的关系，进而求解位系数。本节主要讨论卫星在轨道位置处的日、月摄动位的计算公式。

4.2.1　日、月对卫星的三体摄动位

卫星绕地球的运动，除了受地球重力场的作用之外，还受到各种摄动力的影响，其中日、月对卫星的摄动力也是一种保守力，日、月对卫星的摄动力场也可以用一个位函数表示，称这个位函数为“日、月摄动位”。由于日、月的摄动机制完全相同，讨论方法也几乎一致，总是把这两种摄动放在一起考虑，称为“日月摄动”。现在以月球为例讨论摄动力和摄动位，对于太阳的情况完全类似。

月球在地球引力的作用下围绕地球公转，同样，月亮对地球也有引力作用，因此地月之间就构成一个相互吸引的引力系统，并有一个公共质心，称为“地月系中心”。月球和地球就围绕地月系中心转动，卫星随地球绕地月系中心转动，卫星受到一个惯性离心力的作用，同时卫星在轨道上任意一点还受到月球的引力作用，这两个力的合力称为“三体摄动力”。

由于月球的形状摄动是个小量，在目前的测量精度下，月球形状摄动不必考虑，月球完全可以看成质点。设地球的质量为 m_1，卫星和月球的质量分别为 m_2 和 m_3，卫星的质量和月球的质量相比较是个小量，可以忽略。在以地心 o 为坐标原点的一个坐标系中，假设 $\vec{r}$ 为卫星的地心位置向量，$\vec{\rho}$ 为卫星至月球的向量，$\vec{r}_d$ 为月球的地心位置向量，月球的摄动加速度为：

$$\ddot{\vec{r}} = Gm_3 \left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{r}_d}{r_d^3}\right) \tag{4-2-2}$$

式中，$Gm_3 \dfrac{\vec{\rho}}{\rho^3}$ 为卫星受月球引力引起的加速度向量；$-Gm_3 \dfrac{\vec{r}_d}{r_d^3}$ 是由于以地球质心为原点的坐标系随地球一起绕地月系中心旋转而产生的离心加速度，其绝对值就是地球受月球引力引起的加速度向量。把两项合在一起，称为“卫星受月球摄动的加速度”。月球对卫星的摄动位为：

$$V = Gm_3 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_d} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_d}{r_d^3}\right) \tag{4-2-3}$$

V_d 对 $\vec{r}$ 的导数即为式(4-2-2)，设 $\vec{r}$ 和为 $\vec{r}_d$ 的夹角为 φ，$1/\rho$ 可用 $\cos\varphi$ 的勒让德多项式的级数表示，则月球对卫星的引力位可用球函数表示为：

$$V = Gm_3 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{r^l}{r_d^{l+1}} \mathrm{P}_l(\cos\varphi) \tag{4-2-4}$$

$\mathrm{P}_l(\cos\varphi)$ 是 l 阶勒让德多项式，根据球函数的加法公式将 $\mathrm{P}_l(\cos\varphi)$ 分解，式(4-2-4)变为：

$$\begin{aligned} V = \frac{Gm_3}{r_d} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_d}\right)^l \Big[& \mathrm{P}_l(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta') \\ & + 2\sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\cos(\lambda-\lambda') \Big] \end{aligned} \tag{4-2-5}$$

由于 r 比 r_d 小得多，勒让德级数 $\mathrm{P}_l(\cos\varphi)$ 随 n 的增大收敛很快，一般对月球来说的三阶位大约为二阶位的几百分之一，而对于



太阳，三阶位约为二阶位的十万分之一，是个更小的量。只考虑二阶位的公式为：

$$V_2 = \frac{Gm_3}{2} \frac{r^2}{d^3}(3\cos^2\varphi - 1) \tag{4-2-6}$$

4.2.2　日、月引潮力附加位

太阳和月球的万有引力作用在地球上，还可以引起固体地球和海洋的潮汐运动。潮汐运动引起地球内部物质的周期性重新分布，这种地球的形变会影响地球的重力场，使卫星位置的引力位发生变化，我们称之为“日、月引潮力附加位”，可以作为日、月摄动位的附加位考虑。对于日、月摄动位的 l 阶位 V_l，由形变引起的附加位为：

$$\Delta v_l = k_l \left(\frac{a_e}{r}\right)^{2l+1} V_l \tag{4-2-7}$$

式中，a_e 为地球的赤道半径；k_l 为勒夫(Love)数，是描述固体地球在外力作用下产生形变的无量纲的参数。这样，作用在卫星上日(月)摄动位和引潮力附加位为：

$$\begin{aligned}\tilde{V} = Gm_3 \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r^l}{r_d^{l+1}} + k_l \frac{a_e^{2l+1}}{r \cdot r_d^{l+1}}\right)[\mathrm{P}_l(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta') \\ + 2\sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\cos(\lambda-\lambda')]\end{aligned} \tag{4-2-8}$$

对一般的近地卫星，只需考虑二阶引潮力附加位，k_2 通常取 0.3。

4.2.3　永久潮汐的处理

地球固体潮引起的重力位系数变化的平均值并不等于零，这个永久潮汐值得特别注意，利用 CHAMP 卫星数据求出 $\bar{C}_{20}$ 项应该加上一个永久潮汐改正 $\Delta\bar{C}_{20}$，根据 IERS 规范推荐值，$\Delta\bar{C}_{20} = -4.201 \times 10^{-9}$。

4.3 加速度数据的处理

4.3.1 加速度数据的标校

使用加速度资料之前需要对加速度数据进行偏差、尺度因子的修正。GFZ 数据中心提供的 CHAMP 加速度计数据文件中给出了用于标校的参数，包括加速度改正数(洛仑兹力改正和模型改正)、尺度因子和偏差参数。但是尺度因子和偏差参数在使用前必须重新标定。

4.3.2 加速度数据的坐标系转换

经过标校的加速度是仪器固定坐标系(Instrument Fixed System，IFX)下的加速度数据。因此，需要首先将仪器系下的加速度数据转换到星体系下，再利用姿态数据将星体系下的加速度计数据转换到惯性系下。第三章对这个转换过程有详细的介绍，并且都给出了相应的转换矩阵，在此不作赘述。

4.3.3 加速度数据处理过程中值得注意的几个问题

(1)GFZ 的加速度文件中提供的用于加速度修正的尺度因子和偏差参数是一个平均值，使用前必须对修正因子进行重新标定。目前重新标定修正因子通常采用两种方法：现有重力场模型标定和卫星轨迹交叉点平差法标定。

(2)加速度数据文件中给出的改正数与对应的观测时刻有 2 秒的滞后，由于滞后时间较短，可以利用线性内插的方法将加速度改正数归算到观测时刻。

(3)姿态数据经常出现间断现象，间断一般持续几个到几十个历元不等，姿态数据也需要内插计算，当姿态数据间断大于 10 个历元时，利用内插姿态数据得到的加速度的精度就要受到影响。



(4)若 CHAMP 卫星加速度仪的其中一个电极出现故障,会导致所测径向方向的加速度值出现大的偏差。因此,若径向方向的加速度观测值未得到合理的处理,计算的耗散能量会产生较大的误差。目前许多学者建议采用如下公式:

$$F_{\text{drag}} = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}| \cdot a_y \mathrm{d}t \tag{4-3-1}$$

式中,$|\vec{v}|$ 为速度矢量的模;a_y 为加速度仪沿迹方向的分量。原因在于耗散能量主要由沿迹方向的非保守力引起,而沿迹方向的非保守力正好由加速度仪沿迹方向的分量 a_y 测得。

4.4 能量守恒法恢复地球重力场数学模型

地球引力位的正规化的球函数级数式为:

$$V(\rho,\theta,\lambda) = \frac{GM}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda + \bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)\right] \tag{4-4-1}$$

式中,θ 和 λ 为卫星的余纬和经度;a 为地球平均赤道半径;GM 为地球引力系数;$\bar{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)$ 为正常化的缔合勒让德多项式;$\bar{C}_{nk}$ 和 $\bar{S}_{nk}$ 为正常化的地球引力位系数;n 和 k 为勒让德多项式的阶和次。

把上式代入能量守恒方程式(4-2-1)得:

$$\frac{GM}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda + \bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\vec{v}^2 - V_{\text{sun}} - V_{\text{moon}} - \vec{\omega}(xv_y - v_x y) - \int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t - E_0 \tag{4-4-2}$$

对于卫星的位置、速度和加速度都为已知的历元,上式左端的未知数为 $\bar{C}_{nk}$ 和 $\bar{S}_{nk}$,其余的均为已知数。方程式右端的 E_0 可以作为未知数处理,也可以通过两个方程差分方法消去,右端其余各项都可以计算出相应的数值。以 E 代表某一历元卫星位置处的重力位减去地球中心引力后得到的扰动位,对于每个历元都可以计算出具体

的扰动位数值，方程式可以简写为：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(K_{nk}\bar{C}_{nk}+L_{nk}\bar{S}_{nk})=E \tag{4-4-3}$$

式中，

$$K_{nk}=\frac{GMa^{n}}{\rho^{n+1}}\overline{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)\cdot\cos k\lambda$$

$$l_{nk}=\frac{GMa^{n}}{\rho^{n+1}}\overline{\mathrm{P}}_{nk}(\cos\theta)\cdot\sin k\lambda$$

获得卫星位置的扰动位时间序列后，即可组成方程组，按最小二乘方法恢复地球引力场位系数。式(4-4-3)就是利用能量守恒原理恢复地球重力场位系数的数学模型。

4.5 误差分析

惯性系下的能量守恒方程式为：

$$V=\frac{1}{2}\vec{v}^{2}-V_{\mathrm{sun}}-V_{\mathrm{moon}}-\vec{\omega}(xv_{y}-v_{x}y)-\int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-E_{0} \tag{4-5-1}$$

假如在卫星高度处获得的扰动位的精度为 1 $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$，根据布隆公式 $N=\frac{T}{\gamma}$，则对应于卫星高度处的大地水准面的精度为 10 cm。按此精度要求，对应于卫星的位置及速度的精度要求加以分析如下。

4.5.1 卫星动能的误差分析

动能项的微分形式为：

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{kin}}=v\cdot\mathrm{d}v \tag{4-5-2}$$

CHAMP 卫星在轨道的运行速度在 7500 m/s 左右，要使动能项对扰动位的影响小于 1 $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$，对应的速度精度应在 0.133 mm/s 水平。对于动力法轨道，位置和速度是同时计算出来的，速度精度与该值相当。如果采用的是几何法轨道，其速度根据位置差分得到，速度的内插通常采用数值微分方法、三次样条或者平滑三次样条内插方



法，速度精度比约化动力法轨道的精度略低。

4.5.2　位旋转效应项的误差分析

设地球自转的角速度为一常量，位旋转效应项的微分形式为：

$$dE_{rot} = \vec{\omega}(v_y dx + v_x dy) + \vec{\omega}(x dv_y + y dv_x) \qquad (4\text{-}5\text{-}3)$$

从上式可以看出，扰动位对位置误差要求较低，位置误差在 1 m 的情况下，位旋转效应项误差对扰动位的影响小于 0.5 m^2/s^2。

4.5.3　加速度计的误差分析

由于涉及积分计算，加速度计误差影响较为复杂，不能用简单的线性公式加以描述，只能大致地估计其最大影响：

$$dE_{acc} = |\vec{v}| \cdot (t - t_0) da \qquad (4\text{-}5\text{-}4)$$

卫星的速度为 7500 m/s 左右，则 10^{-8} m/s^2 的加速度计误差在一天时间内引起的扰动位最大误差约 5 m^2/s^2。事实上，这种影响比估计的要小得多。

4.5.4　地球中心引力项的误差分析

地球对卫星的中心引力项与卫星的位置误差有关。

$$dU_0 \approx \frac{fM}{|r^3|} r \cdot dr \qquad (4\text{-}5\text{-}5)$$

要保证地球中心引力项对扰动位的影响小于 1 m^2/s^2，则位置误差要在 10 cm 左右的精度。

4.5.5　其他保守力模型的误差分析

卫星除受地球引力的作用外，还受到其他保守力的作用，其他保守力主要考虑日月引力、固体潮、海潮和相对论效应。在计算中主要考虑的是日月引力位和固体地球和海洋的潮汐运动引起的日月引力附加位。现在这些保守力的摄动影响可用模型较准确地计算出，完全可以满足 1 m^2/s^2 的精度，实际计算中，该项误差的影响可以忽略。

由上面的误差分析可以看出:各项误差中,影响最大的是卫星的动能,因为它对卫星速度的误差非常敏感。其次是正常重力位和非保守力能量损耗的影响,因为这两项分别对卫星位置误差和加速度计误差敏感。其他几项对卫星位置和速度的精度要求相对较低。

4.6 重力场恢复计算方法

利用卫星在轨道运动过程中总能量守恒的原理,建立卫星的状态向量(位置、速度和加速度)和引力位能的关系,获得卫星高度处的扰动位时间序列。目前有三种常用的方法用以根据扰动位时间序列观测值恢复地球重力场模型:(1)直接法;(2)半解析法;(3)快速最小二乘配置法。本节对这三种方法分别加以介绍。

4.6.1 直接法

直接法是直接以能量守恒方法得到的卫星高度处的扰动位时间序列作为观测值,建立与地球重力场位系数的关系式,组成方程组,利用最小二乘法或正则化方法估计位系数。

在地固系中,空间任意一点的扰动位可表示为:

$$T = \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=0}^{n} (\bar{C}_{nm} \bar{U}_n^m + \bar{S}_{nm} \bar{V}_n^m) \tag{4-6-1}$$

其中

$$\begin{cases} \bar{U}_n^m = \dfrac{GM_e a_e^n \bar{P}_n^m(\sin\varphi)\cos m\lambda}{r^{n+1}} \\ \bar{V}_n^m = \dfrac{GM_e a_e^n \bar{P}_n^m(\sin\varphi)\sin m\lambda}{r^{n+1}} \end{cases} \tag{4-6-2}$$

式中,φ 和 λ 分别为空间单位质点在地固系中的纬度和经度;a_e 为地球平均赤道半径;GM_e 为地球引力系数;$\bar{P}_n^m(\sin\varphi)$ 为正常化的缔合勒让德尔多项式;$\bar{C}_{nm}$ 和 $\bar{S}_{nm}$ 为正常化的地球引力位系数;n 和 m 为



多项式的阶和次。$\bar{U}_n^m$ 和 $\bar{V}_n^m$ 可以通过递推公式求得。

将式(4-2-1)代入式(4-6-1)，得：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(K_{nk}\bar{C}_{nk}+L_{nk}\bar{S}_{nk})=E \tag{4-6-3}$$

根据(4-2-1)得到的卫星位置的扰动位时间序列组成的方程组，按最小二乘方法估计出重力场模型位系数。

4.6.2　半解析法

用直接法估计地球重力场位系数，由于数据量大，未知参数较多，而且观测方程通常为满阵(非对角或块状对角)，大大增加了计算机的计算和存储负担。解决这一问题的有效方法之一就是采用半解析方法(Semi-analytical Method)。该方法基于特殊轨道几何结构(即轨道倾角和半径为常量的情形)建立观测方程，此时其对应的法矩阵为一块状对角阵，每一个矩阵块可以单独求逆，这将大大减少计算时间。

半解析法的基本原理是将轨道高度处的扰动位用如下傅立叶变换系数集表示：

$$T(u,\Lambda)=\sum_{m=-L}^{L}\sum_{k=-L}^{L}A_{mk}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ku+m\Lambda)} \tag{4-6-4}$$

式中，A_{mk} 为系数集；Λ 为升交点经度；升交角距 $u=\nu+\omega$ 为真近点角 ν 和近地点角距 ω 之和；L 为引力位系数最大阶数。

通过傅立叶变换可求得 A_{mk}，引力位系数 ΔK_{lm} 可以由 A_{mk} 按以下公式求得：

$$A_{mk}=\sum_{l=\max(|m|,|k|)}^{L}\frac{GM}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}F_{lmk}(I)\Delta K_{lm} \tag{4-6-5}$$

式中，$F_{lmk}(I)$ 为轨道倾角函数。

公式(4-6-4)和(4-6-5)便是半解析方法的基本观测方程。利用上述公式计算时应该注意以下两点：

(1)在应用能量守恒方程式时，必须先将轨道高度处的扰动位时

间序列归算到同一轨道高度(CHAMP 卫星，一般取 430 千米),其公式如下：

$$T = T_0 + \left(\frac{\partial T_0}{\partial r}\Delta h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2}\Delta h^2\right) \tag{4-6-6}$$

然后根据轨道元素计算圆环面坐标 u 和 Λ 。

(2)方程(4-6-4)为二维傅立叶变换形式,它要求时间序列规则分布在一圆环面上,因此,要将归算后的扰动位进行网格化处理。由网格化数据便可根据方程(4-6-4)求得位系数集 A_{mk}，进而根据式(4-6-5)可求出位系数 ΔK_{lm} 。

4.6.3 快速最小二乘配置法

快速最小二乘配置法是将能量守恒方法计算出的扰动位时间序列向上或向下延拓到同一轨道高度(对 CHAMP 卫星，一般取 430 千米),延拓公式为(4-6-6)。获得同一轨道高度的扰动位后,对其进行网格化处理,然后利用最小二乘配置法计算位系数及其误差,此时方程维数会大大降低,计算时间也大大缩短。实际应用中通常采用“移去-恢复”方法,即首先从延拓后的扰动位观测值中减去由EGM96(或其他重力场模型)一定阶次计算出的扰动位,以此进行网格化处理,解算出位系数之后,再将“移去”部分的先验位系数加上,这样做的目的是使剩余扰动位在统计意义上分布更均匀,能在一定程度上提高最小二乘配置的精度。

4.6.4 各种方法的优缺点分析

上述方法都可以应用于地球重力场位系数的求解,但各有优缺点。直接法可归于时域法;半解析法和快速最小二乘配置法可归于空域方法。直接法直接利用扰动位观测值建立扰动位与位系数间的观测方程,解算位系数,建立方程时不包含任何的近似或者约化。该方法的缺点是针对每个历元都要建立观测方程,方程维数大,在组成法方程时耗时大,方程的求逆也需要大量时间。半解析法和快速最



小二乘配置法都需要将空间分布不规则的扰动位序列进行网格化处理，得到规则的网格点数据。只要预先确定网格大小(取决于数据分辨率)，则网格点的个数一定，从而方程的维数也是一定的，方程的解算更容易。而且，半解析法和快速最小二乘配置法得到的法方程的、块状对角的形式，因此方程的求逆简便、快捷。但半解析法和快速最小二乘配置法的缺点是在进行延拓和网格化处理中，进行了近似处理，得到的观测值是网格的平均值，不可避免地引入一些误差，主要是延拓误差和网格化误差。

4.7　CHAMP卫星地球引力场位系数解算

基于能量守恒原理恢复地球重力场的理论和方法早在20世纪60年代就已经提出，专用于重力计划的CHAMP卫星的发射，才使利用能量守恒原理恢复地球重力场由理论走向实践。CHAMP卫星精密的轨道数据和非保守力加速度的估计数据使应用能量守恒的方法恢复地球重力场变为可能。最近几年，国际上许多科研人员对基于能量守恒定律恢复地球重力场的理论和方法进行了深入的研究，并且成功得到了一系列基于此方法的CHAMP卫星和GRACE卫星数据确定的地球重力场模型。采用2002年1～2月、2002年7～8月和2002年11～12月三个不同时间段共180天的数据，利用两历元间差分建立方程组的方法恢复了三组50阶地球重力场模型，分别命名为GFM01，GFM02，GFM03，并将三组重力场模型分别与EGM96重力场模型及GFZ公布EIGEN-CG01C重力场模型和进行比较，说明了能量守恒方法恢复低阶地球重力场位系数的有效性，也说明相邻历元间差分建立恢复重力场位系数方程组的可行性。

4.7.1　恢复地球重力场的两历元间差分方法

地球引力位的正规化的球函数级数式为：

$$V(\rho,\theta,\lambda)=\frac{GM}{\rho}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda+\bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{P}_{nk}(\cos\theta)\right] \tag{4-7-1}$$

式中，θ 和 λ 为卫星的余纬和经度；a 为地球平均赤道半径；GM 为地球引力系数；$\bar{P}_{nk}(\cos\theta)$ 为正常化的缔合勒让德多项式；$\bar{C}_{nk}$ 和 $\bar{S}_{nk}$ 为正常化的地球引力位系数；n 和 k 为勒让德多项式的阶和次。

把上式代入能量守恒方程式(4-2-1)得：

$$\frac{GM}{\rho}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda+\bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{P}_{nk}(\cos\theta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\vec{v}^2-V_{\text{sun}}-V_{\text{moon}}-\vec{\omega}(xv_y-v_xy)-\int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-E_0 \tag{4-7-2}$$

对于卫星的位置和速度、加速度都为已知的历元，上式左端的未知数为 $\bar{C}_{nk}$ 和 $\bar{S}_{nk}$ ，其余的均为已知数，右端各项也可以计算出相应的数值。

令：

$$E'=\frac{1}{2}|\vec{v}|^2-V_{\text{sun}}-V_{\text{moon}}-\vec{\omega}(xv_y-yv_x)$$

式(4-7-2)变为：

$$\frac{GM}{\rho}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda+\bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{P}_{nk}(\cos\theta)\right]$$
$$=E'-\int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-E_0 \tag{4-7-3}$$

假设卫星在轨道相邻两历元 i 和 $i+1$ 的位置分别为 $A(\rho_A,\theta_A,\lambda_A)$ 和 $B(\rho_B,\theta_B,\lambda_B)$ ，则在位置 A 有：

$$\frac{GM}{\rho_A}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho_A}\right)^{n}(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda_A+\bar{S}_{nk}\sin k\lambda_A)\bar{P}_{nk}(\cos\theta_A)\right]$$
$$=E_A'-\int_{0}^{t_i}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-E_0 \tag{4-7-4}$$

在位置 B 有：



$$\frac{GM}{\rho_B}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho_B}\right)^n(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda_B+\bar{S}_{nk}\sin k\lambda_B)\bar{P}_{nk}(\cos\theta_B)\right]$$

$$=E_B{}'-\int_0^{t_{i+1}}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-E_0 \tag{4-7-5}$$

在两历元间做差分，即式(4-7-4)－式(4-7-5)得：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left[\frac{GMa^n}{\rho_B^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_B)\cos k\lambda_B-\frac{GMa^n}{\rho_A^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_A)\cos k\lambda_A\right]\bar{C}_{nk}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{GMa^n}{\rho_B^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_B)\sin k\lambda_B-\frac{GMa^n}{\rho_A^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_A)\sin k\lambda_A\right]\bar{S}_{nk}\right\}$$

$$=E_B{}'-E_A{}'+\frac{GM}{\rho_B}-\frac{GM}{\rho_A}-\int_{t_i}^{t_{i+1}}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t \tag{4-7-6}$$

如果我们令：

$$\left.\begin{aligned}\frac{GMa^n}{\rho_B^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_B)\cos k\lambda_B-\frac{GMa^n}{\rho_A^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_A)\cos k\lambda_A&=K_{nk}\\ \frac{GMa^n}{\rho_B^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_B)\sin k\lambda_B-\frac{GMa^n}{\rho_A^{n+1}}\bar{P}_{nk}(\cos\theta_A)\sin k\lambda_A&=L_{nk}\\ E_B{}'-E_A{}'+\frac{GM}{\rho_B}-\frac{GM}{\rho_A}-\int_{t_i}^{t_{i+1}}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t&=E\end{aligned}\right\} \tag{4-7-7}$$

对于已知位置 A 和位置 B，根据两点的球坐标 $A(\rho_A,\theta_A,\lambda_A)$ 和 $B(\rho_B,\theta_B,\lambda_B)$，式(4-7-7)中都是可以计算出的量。

式(4-7-6)变为：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(K_{nk}\bar{C}_{nk}+L_{nk}\bar{S}_{nk})=E \tag{4-7-8}$$

在式(4-7-8)中，只有地球引力场位系数为未知量，获得卫星位置的扰动位时间序列，组成方程组，即可按最小二乘方法恢复地球引力场位系数。

4.7.2　运用最小二乘法求解

如果我们将地球引力位系数完全到 n 阶次，可以根据卫星数据

列出多于满足解算需要的观测方程组。假设有 T 个观测方程，则观测方程的矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} K_1^{20}, L_1^{20}, K_1^{21}, L_1^{21}, K_1^{22}, L_1^{22}, K_1^{30}, L_1^{30}, K_1^{31}, L_1^{31}, \cdots, K_1^{nn}, L_1^{nn} \\ K_2^{20}, L_2^{20}, K_2^{21}, L_2^{21}, K_2^{22}, L_2^{22}, K_2^{30}, L_2^{30}, K_2^{31}, L_2^{31}, \cdots, K_2^{nn}, L_2^{nn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ K_T^{20}, L_T^{20}, K_T^{21}, L_T^{21}, K_T^{22}, L_T^{22}, K_T^{30}, L_T^{30}, K_T^{31}, L_T^{31}, \cdots, K_T^{nn}, L_T^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{C}_{20} \\ \overline{S}_{20} \\ \overline{C}_{21} \\ \overline{S}_{21} \\ \overline{C}_{22} \\ \overline{S}_{22} \\ \overline{C}_{30} \\ \overline{S}_{30} \\ \vdots \\ \overline{C}_{nn} \\ \overline{S}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_T \end{pmatrix} \tag{4-7-9}$$

简写为：

$$\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{E} \tag{4-7-10}$$

其中：

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} K_1^{20}, L_1^{20}, K_1^{21}, L_1^{21}, K_1^{22}, L_1^{22}, K_1^{30}, L_1^{30}, K_1^{31}, L_1^{31}, \cdots, K_1^{nn}, L_1^{nn} \\ K_2^{20}, L_2^{20}, K_2^{21}, L_2^{21}, K_2^{22}, L_2^{22}, K_2^{30}, L_2^{30}, K_2^{31}, L_2^{31}, \cdots, K_2^{nn}, L_2^{nn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ K_T^{20}, L_T^{20}, K_T^{21}, L_T^{21}, K_T^{22}, L_T^{22}, K_T^{30}, L_T^{30}, K_T^{31}, L_T^{31}, \cdots, K_T^{nn}, L_T^{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = (\overline{C}_{20}, \overline{S}_{20}, \overline{C}_{21}, \overline{S}_{21}, \overline{C}_{22}, \overline{S}_{22}, \overline{C}_{30}, \overline{S}_{30}, \cdots, \overline{C}_{nn}, \overline{S}_{nn})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4, \cdots, E_T)^{\mathrm{T}}$$

设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的先验值为 $\boldsymbol{X}'$ 和 $\boldsymbol{E}'$，则 $\Delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}$。其中 $\Delta\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的残差；$\boldsymbol{f} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(K_{nk}\overline{C}_{nk} + L_{nk}\overline{S}_{nk}) - \boldsymbol{E}$；$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为引力位系数的残



差，$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}$，该式中 $\boldsymbol{P}$ 为位能差 $\boldsymbol{E}$ 的先验权阵。如果认为卫星的观测数据是等精度的，$\boldsymbol{P}$ 即为单位阵。最后得到结果为：$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}' + \hat{\boldsymbol{x}}$。

验后单位权方差：$\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{n-t}$

引力位系数的互协因数阵为：$\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}$

引力位系数的方差阵为：$\boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^2\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}$

求解 50 阶以下的低阶位系数，可直接用最小二乘方法恢复地球重力场位系数，但当位系数超过 70 阶时，必须采用正则化解法。利用 GFZ 数据中心提供的精密星历数据(PSO)和加速度数据(ACC)作为恢复重力场的原始数据，采用 2002 年 1～2 月、2002 年 7～8 月和 2002 年 11～12 月三个不同时间段共 180 天的数据恢复三组 50 阶地球重力场模型，分别命名为 GFM01，GFM02，GFM03。

4.7.3　GFM 系列重力场模型计算的大地水准面起伏

由于地球的形状和质量分布的不规则性，地球重力场和大地水准面起伏极其复杂。如果采用实际地球的长半径、扁率、引力场参数和旋转角速度作为正常椭球参数，就能得到一个与大地水准面的几何形状和外部重力场符合得很好的水准椭球，即平均椭球。利用地球引力位和正常引力位就可以推算出大地水准面的起伏与重力异常。大地水准面起伏和重力异常的表达式为：

$$N(r,\theta,\lambda) = R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_{nm}^{*}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\mathrm{P}_{nm}(\sin\theta) \quad (4\text{-}7\text{-}11)$$

$$g(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{a_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(C_{nm}^{*}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\mathrm{P}_{nm}(\sin\theta) \quad (4\text{-}7\text{-}12)$$

利用能量守恒方法恢复的系列重力场模型 GFM01、GFM02 和 GFM03 计算的全球 1°×1°大地水准面起伏结果如图 4-1 至图 4-3 所示。

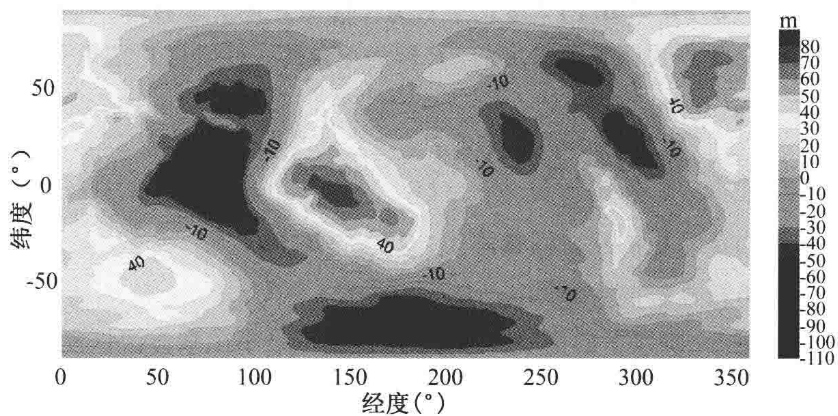


图 4-1 GFM01 模型计算的大地水准面起伏

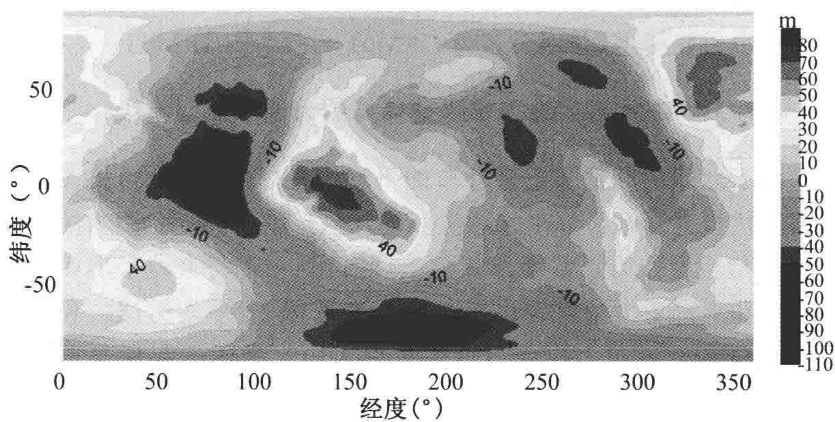


图 4-2 GFM02 模型计算的大地水准面起伏



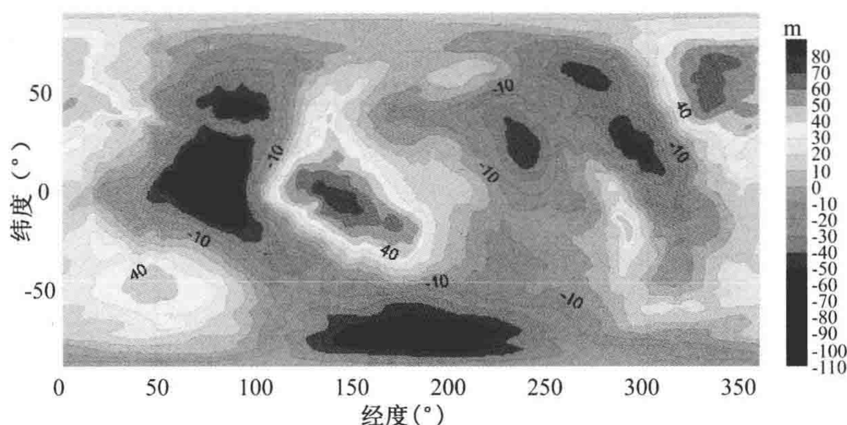


图 4-3　GFM03 模型计算的大地水准面起伏

4.7.4　GFM 系列重力场模型与其他模型位系数的比较

将三组重力场模型分别与 EGM96 重力场模型及 GFZ 公布 EIGEN-CG01C 重力场模型和进行比较，统计结果采用位系数之差的阶方差 RDS（Root of Degree-error Square）进行评定，计算公式为：

$$\delta_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{n}[(C_{nk} - C'_{nk})^2 + (S_{nk} - S'_{nk})^2]} \qquad (4\text{-}7\text{-}13)$$

式中，C_{nk} 和 S_{nk} 为 EGM96 或 EIGEN-CG01C 重力场模型的位系数；C'_{nk} 和 S'_{nk} 为 GFM 系列重力场模型位系数。

GFM 系列重力场模型与 EGM96 模型及 EIGEN-CG01C 模型位系数差值的阶方差结果如图 4-4 至图 4-6 所示。

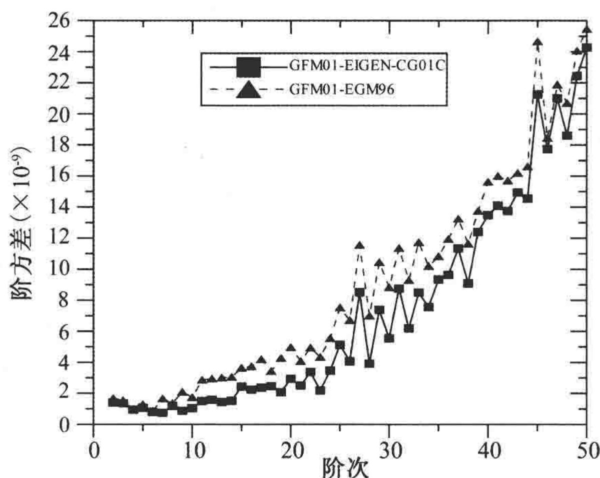


图 4-4 GFM01 模型与其他模型位系数差值的阶方差结果

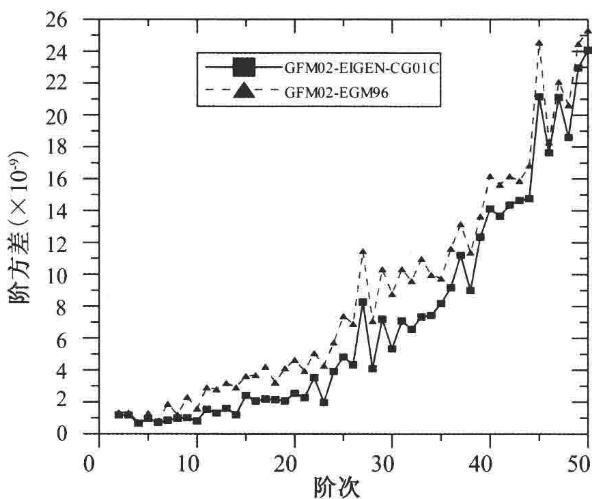


图 4-5 GFM02 模型与其他模型位系数差值的阶方差结果



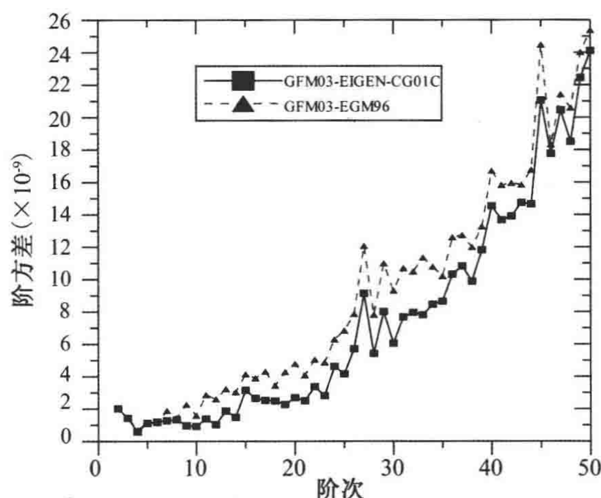


图 4-6　GFM03 模型与其他模型位系数差值的阶方差结果

4.7.5　GFM 系列重力场模型与其他模型大地水准面高的差值结果

利用能量守恒方法恢复的系列重力场模型 GFM01、GFM02 和 GFM03 与 EGM96 模型和 EIGEN-CG01C 模型计算的全球 1°×1° 大地水准面差值结果如图 4-7、图 4-8 所示。

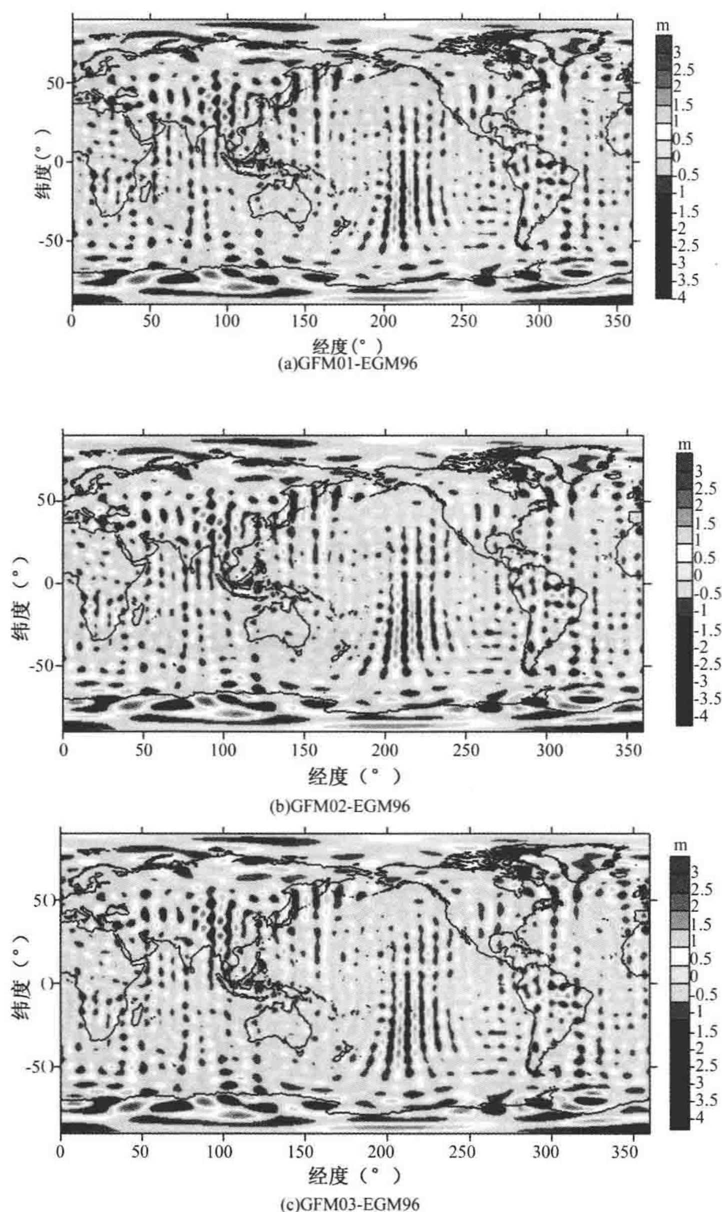
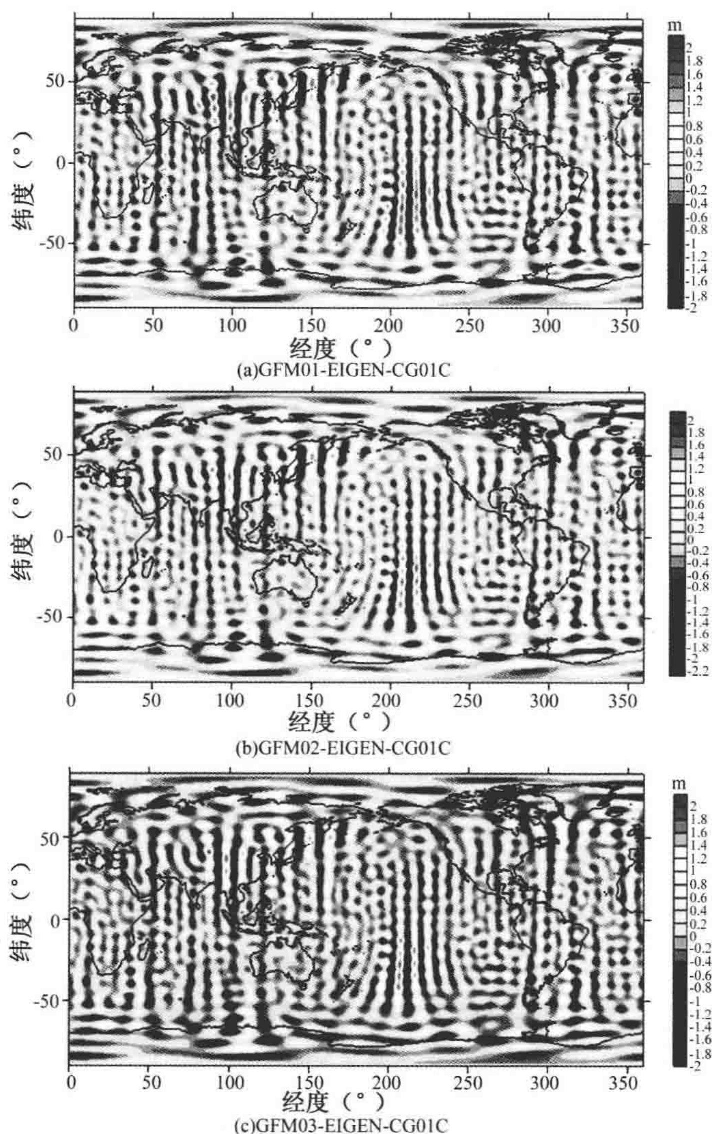


图 4-7　GFM 系列重力场模型与 EGM96 模型计算的全球 1°×1°大地水准面差值结果



(a)GFM01-EIGEN-CG01C

(b)GFM02-EIGEN-CG01C

(c)GFM03-EIGEN-CG01C

图 4-8　GFM 系列重力场模型与 EIGEN-CG01C 模型计算的全球 1°×1°大地水准面差值结果

4.7.6 大地水准面高及重力异常的差值统计结果

利用能量守恒方法恢复的系列重力场模型 GFM01、GFM02 和 GFM03 与 EIGEN-CG01C 模型和 EGM96 模型计算的全球 $1^\circ\times1^\circ$ 大地水准面及重力异常的差值统计结果分别列于表 4-1 至表 4-4。

表 4-1 GFM 系列重力场模型与 EIGEN-CG01C 模型计算的全球 $1^\circ\times1^\circ$ 大地水准面差值统计结果

重力场模型	大地水准面差值(m)			
	最大值	最小值	平均值	标准差
GFM01	1.868	−1.971	0.0077	0.0635
GFM02	1.836	−2.011	0.0070	0.0647
GFM03	1.927	−1.941	−0.0013	0.0703

表 4-2 GFM 系列重力场模型与 EIGEN-CG01C 模型计算的全球 $1^\circ\times1^\circ$ 重力异常差值统计结果

重力场模型	重力异常差值(mGal)			
	最大值	最小值	平均值	标准差
GFM01	12.240	−12.840	0.0283	0.4059
GFM02	11.920	−12.730	0.0288	0.4014
GFM03	13.270	−12.790	0.0282	0.4225

表 4-3 GFM 系列重力场模型与 EGM96 模型计算的全球 $1^\circ\times1^\circ$ 大地水准面差值统计结果

重力场模型	大地水准面差值(m)			
	最大值	最小值	平均值	标准差
GFM01	2.557	−3.564	0.0066	0.0767
GFM02	2.611	−3.648	0.0059	0.0769
GFM03	2.603	−3.641	−0.0024	0.0814



表 4-4　　GFM 系列重力场模型与 EGM96 模型计算的全球 1°×1°重力异常差值统计结果

重力场模型	重力异常差值(mGal)			
	最大值	最小值	平均值	标准差
GFM01	16.340	−19.090	0.0145	0.4711
GFM02	15.850	−19.280	0.0150	0.4674
GFM03	16.940	−19.550	0.0143	0.4800

基于上面的比较,可以得到以下结论:

(1)能量守恒方法恢复的 GFM 系列地球重力场模型与 EGM96 模型和 EIGEN-CG01C 模型比较,30 阶以前位系数差的阶误差方根小于 1.0×10^{-8},30 阶以后位系数差的阶误差方根也小于 2.5×10^{-8}。这说明能量守恒方法恢复低阶地球重力场位系数有较好的结果。

(2)由系数差阶方差比较结果来看,GFM 系列重力场模型低阶位系数与 EIGEN-CG01C 模型有更好的一致性,这与 EGM96 早期跟踪卫星的资料少,数据覆盖率低,从而 EGM96 模型的长波部分精度低有关,也说明了 CHAMP 卫星观测数据大大地改善了地球重力场长波部分的精度。

(3)GFM 系列地球重力场模型与 EIGEN-CG01C 模型计算的全球 1°×1°大地水准面差值一般在 0.5 m 以下,平均值小于 0.008 m。全球 1°×1°重力异常的差值在 5 mGal 以下,平均值小于 0.030 mGal。大地水准面和重力异常差值较大的地方在卫星轨道的间隙、南北极地区和高原海沟区。相信若适当增加数据量,就可取得较好的结果。

第5章　山东省及邻区重力与地形数据预处理

5.1　山东省及邻区自然地理概况

物理大地测量学的核心问题包括全球重力场逼近和局部重力场逼近，本书中对局部重力场逼近的研究区域以山东省为主，包括山东省邻近区域，主要内容为区域(似)大地水准面精化。如图5-1所示，山东省及邻近区域地理位置在北纬33°至39°、东经113°至124°之间，包括山西省东南部、河南省东北部、河北省南部、安徽与江苏省北部地区和整个山东省及近海区域。山地主要是山西省东南太行山东缘、山东中部山区及山东东南部丘陵区，其余以平原为主。

山东省是中国东部沿海的一个重要省份，位于黄河下游，东临渤海、黄海，与朝鲜半岛、日本列岛隔海相望，西北与河北省接壤，西南与河南省交界，南与安徽、江苏省毗邻。山东半岛与辽东半岛相对，环抱着渤海湾。山东拥有3000多千米海岸线，占全国的1/6。

山东省在北纬34°25′至38°23′、东经114°36′至122°43′之间，东西最长约700千米，南北最宽420千米，陆地总面积15.67万平方千米。山东省的地势，中部为隆起的山地，东部和南部为和缓起伏的丘陵区，北部和西北部为平坦的黄河冲积平原，是华北大平原的一部分。山东省的最高点是位于中部的泰山，海拔1545米；最低处是位于东北部的黄河三角洲，海拔2米至10米。山东省地形以平原、丘

陵为主；平原、盆地约占全省总面积的63%；山地、丘陵约占34%；河流、湖泊约占3%。山东省境内河湖交错，水网密布，干流长50千米以上的河流有100多条。山东较大的湖泊有南四湖和东平湖。南四湖由微山湖、昭阳湖、独山湖和南阳湖组成，总面积1375平方千米，为中国十大淡水湖之一。山东主要的山脉有泰山、蒙山、崂山、鲁山、沂山、徂徕山、昆嵛山、九顶山、艾山、牙山、大泽山、孟良崮等。

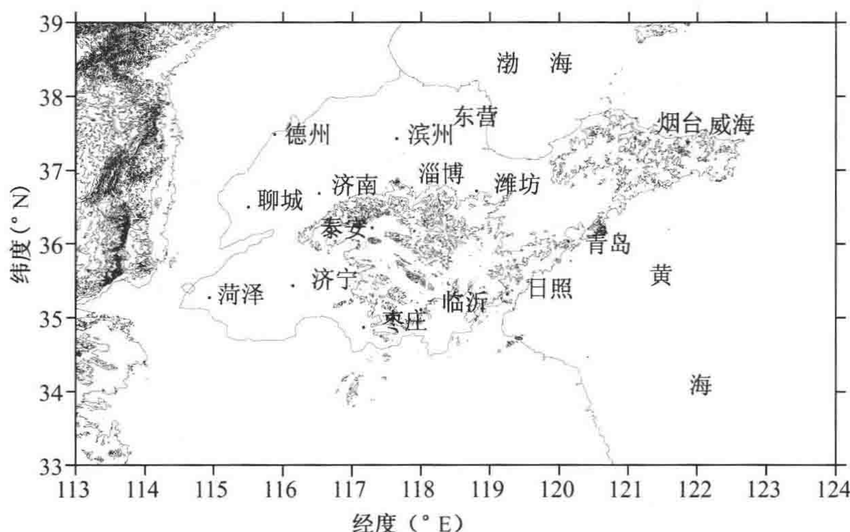


图5-1 山东省及邻区地形地势分布图

5.2 地面重力观测值的归算及格网化

在利用Stokes确定大地水准面的理论中有两个前提，一是大地水准面外部必须没有质量，二是所用的实测重力值应当是大地水准面上的数值 g_0。但事实上重力观测是在地面上进行的，为了满足公式要求，必须将地球进行一些调整，使得全部质量都包含在大地水准面内部，同时将重力值归算到大地水准面上。此外，在内插重力测量空白区的空间重力异常的过程中，通常将重力异常的高频部分去掉，

得到变化较平缓的布格(Bouguer)重力异常或者地形均衡重力异常进行内插计算,然后在内插点或区域加上高频影响,使其恢复成空间重力异常,为此也需要重力归算。在 Molodensky 理论中,计算一次近似项也需要计算重力局部地形改正。

重力归算就是将地球调整以后的影响计算出来,在重力观测值中加以改正。为表示各种重力改正和相应重力异常的物理意义,引入以下符号:

g:地面重力观测值

γ:似地形表面正常重力值

γ_0:参考椭球面正常重力值

Δg:或 Δg_F,空间重力异常

Δg_T:似地形表面上重力异常,简称地面重力异常

Δg_B:Bouguer 重力异常

Δg_{FA}:Faye 重力异常

Δg_I:地形均衡重力异常

δg_F:或 δg_1,为空间改正

δg_{BP}:或 δg_2,为层间改正

δg_{TC}:或 δg_3,为局部地形改正

δg_{IC}:或 δg_4,为地壳均衡改正

δg_B:为 Bouguer 改正

$\delta\Delta g$:残差重力异常(移去模型重力异常)。

其他有关物理量符号:

G:万有引力常数

ρ:地壳密度

H:大地高(椭球高)

h:正高(或正常高)

h^*:正常高

R:地球平均半径



5.2.1　空间改正

空间改正是将海拔高程为 h 的重力点上的重力观测值 g 归算成大地水准面上相应点的重力值 g_0，归算时不考虑地面和大地水准面之间的质量，只考虑高度对重力的改正。

在 Stokes 理论中，空间重力异常的定义为：

$$\Delta g_{\mathrm{F}} = g_0 - \gamma_0 = g + \delta g_{\mathrm{F}} - \gamma_0 \tag{5-2-1}$$

式中：g_0 为地面点归算到大地水准面上对应点的重力值；γ_0 为参考椭球面上与地面重力观测点对应点的正常重力值，采用 Helmert 投影，即沿椭球法线方向投影确定点的对应位置；g 为地面重力观测值；δg_{F} 为这种纯空间归算的重力改正：

$$\delta g_{\mathrm{F}} = -\left(\frac{\partial g}{\partial h}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial h^2}h^2\right) + o(h^3) \tag{5-2-2}$$

式中，h 为重力观测点高程（正高）。略去 h 的三次微量 $o(h^3)$，以正常重力场一阶和二阶法向梯度近似代替式(5-2-2)中地球重力场相应梯度，式(5-2-2)可表示为：

$$\delta g_{\mathrm{F}} \approx -\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2}h^2\right) \tag{5-2-3}$$

将地球近似为匀质圆球，以此确定正常重力的一阶和二阶径向梯度，可得：

$$\delta g_{\mathrm{F}} = 2\bar{\gamma}\frac{h}{R} - 3\bar{\gamma}\frac{h^2}{R^2} \tag{5-2-4}$$

式中，$\bar{\gamma}$ 为地球正常重力均值；R 为地球平均半径。通常 Δg_{F} 采用的实用公式为：

$$\Delta g_{\mathrm{F}} = g + 0.3086h - 0.72 \times 10 - 7h^2 - \gamma_0 \tag{5-2-5}$$

式中，Δg_{F} 以 mGal 为单位；h 的单位为 m。

在 Molodensky 理论中地面重力异常的定义为：

$$\Delta g_{\mathrm{T}} = g_P - \gamma_Q = g - \gamma \tag{5-2-6}$$

式中，g_P 为地面点 P 的重力值；γ_Q 为点 P 在似地形面上投影点 Q

的正常重力值。设点 P 在椭球面上投影点的正常重力值为 γ_0，则：

$$\gamma_Q = \gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h^*} h^* + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^{*2}} h^{*2} + o(h^{*3}) \quad (5\text{-}2\text{-}7)$$

式中，h^* 为正常高。将地球近似视为匀质椭球，通常 Δg_T 采用的实用公式为：

$$\Delta g_T = g + 0.3086 h^* - 0.72 \times 10 - 7 h^{*2} - \gamma_0 \quad (5\text{-}2\text{-}8)$$

式中，Δg_T 以 mGal 为单位；h^* 的单位为 m。

Δg_F 和 Δg_T 在概念上是两种不同性质的重力异常，前者是大地水准面上的，后者是似地形面上的。求 Δg_F 是要将地面重力观测值 g 向下延拓到大地水准面上，严格地说，应采用真实的重力梯度作下延计算，用正常重力梯度计算是一种近似处理；将椭球面上的 γ_0 向上延拓到似地形面则是严格的。可以验证，略去 h 和 h^* 的微小差别，Δg_F 和 Δg_T 在数值上是相等的，实用上通常对两者不加区别，通称“空间重力异常”，用 Δg 表示。

空间重力异常引起的大地水准面的位移相对较小，通常采用空间重力异常来求(似)大地水准面的形状。

5.2.2 层间改正

空间改正没有顾及地面和大地水准面之间的质量对重力的影响，如果将大地水准面看成是外水准面，要在重力观测值中去掉这些质量引起的重力改正。假设通过重力观测点的地面和大地水准面均为平面，实测重力值受地面到大地水准面之间中间层质量的影响，去掉这一中间层质量引起的重力改正成为层间改正，由于这一质量层在重力观测点下方，去掉它重力值减小，因此层间改正为负值，计算公式为：

$$\delta g_2 = -2\pi G \rho h \quad (5\text{-}2\text{-}9)$$

式中，ρ 为地球表层岩石的密度，采用 $\rho = 2.67\ \mathrm{g/cm^3}$，式(5-2-9)可写为：

$$\delta g_2 = -0.1118 h \quad (5\text{-}2\text{-}10)$$



层间改正又称“Bouguer 片改正”。空间改正和层间改正之和称为“不完全 Bouguer 改正”。进行了空间改正和层间改正的重力异常称“不完全 Bouguer 重力异常”。

5.2.3 局部地形改正

层间改正是将地面当作平面，消除的是地面点以下层间质量的影响，但地面是起伏不平的，尤其山区和丘陵地区更是如此，重力局部地形改正就是地面点周围地形起伏部分的质量对重力观测值的影响。

设想将点 P 周围地形根据水平线 HH' 和垂线 PP_0 分成 1、2、3、4 四块，如图 5-2 所示。

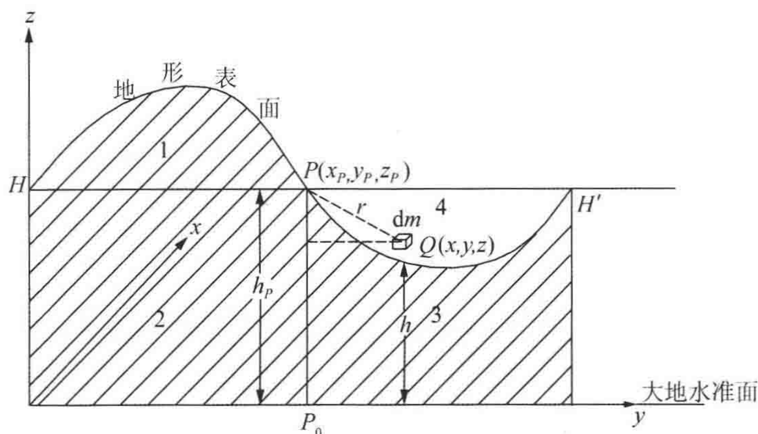


图 5-2 重力局部地形改正

第 1 块在点 P 高程面上方，其引力使点 P 重力值减小；第 2、3、4 块在点 P 高程面下方，如果第 4 块也有质量，这三块质量的引力都使点 P 重力值增加。大地水准面外所有质量对点 P 重力影响为：

$$\begin{aligned}\delta g_{\mathrm{T1}}-\delta g_{\mathrm{T2}}-\delta g_{\mathrm{T3}} &=-(\delta g_{\mathrm{T2}}+\delta g_{\mathrm{T3}}+\delta g_{\mathrm{T4}})+(\delta g_{\mathrm{T1}}+\delta g_{\mathrm{T4}}) \\ &=\delta g_{\mathrm{BP}}+\delta g_{\mathrm{TC}}\end{aligned} \tag{5-2-11}$$

式中，δg_{BP} 为地面重力观测点到大地水准面之间的中间层质量对重力影响，称“层间改正”；δg_{TC} 为地面重力观测点周围地形起伏部分的质量对重力观测值的影响，称“局部地形改正”。

进行层间改正和局部地形改正就是减去大地水准面外所有质量对点 P 重力影响。空间改正、层间改正和局部地形改正之和称“完全 Bouguer 改正”，简称为“Bouguer 改正”。将 Bouguer 重力异常定义为点的空间异常减去大地水准面外的所有地形质量对该点引力的垂向分量：

$$\Delta g_B = \Delta g_F + \delta g_{\mathrm{BP}} + \delta g_{\mathrm{TC}} \tag{5-2-12}$$

如果在观测重力 g 中只加空间改正 δg_{F} 和地形改正 δg_{TC}，再与正常重力相减，其差值称为“Faye 重力异常”：

$$\Delta g_{\mathrm{FA}} = \Delta g_{\mathrm{F}} + \delta g_{\mathrm{TC}} \tag{5-2-13}$$

局部地形改正可直接用引力公式导出其积分式，计算限于计算点 P 为中心的一个球冠范围，由于球冠较小，公式推导可取平面近似。局部地形改正的积分公式可写为：

$$\delta g_{\mathrm{TC}} = G\rho_0 \iint\limits_{\sigma_{\mathrm{cap}}} \int_{h_P}^{h} \frac{z - z_P}{r^3} \mathrm{d}z\mathrm{d}\sigma \tag{5-2-14}$$

对于高出点 P 的地形质量的部分 1(见图 5-2)，其引力方向指向上方，去掉这部分质量，使点 P 重力值增大，地形改正为正；对于高出点 P 的地形质量的部分 4(见图 5-2)，这部分本无质量，但要填进质量，以便在层间改正去掉质量层，而填进的质量，使点 P 重力值增大。因此不论周围地形高出还是低于点 P，局部地形改正总是正的。在积分式(5-2-14)中，当 $h > h_P$ 时，地形质量高于点 P，被积函数的值大于零，积分方向 $z_P \rightarrow z$ 与 z 轴正向一致，积分值为正，是真实地形质量的影响；当 $h < h_P$ 时，地形质量低于点 P，被积函数的值小于零，积分方向 $z_P \rightarrow z$ 与 z 轴正向相反，积分值仍为正，是“虚拟”地形质量的影响。积分式(5-2-14)满足局部地形改正总为正值的要求。式(5-2-14)对 z 变量的积分可变为：



$$\int_{h_P}^{h}\frac{z-z_P}{r^3}\mathrm{d}z=\int_{h_P}^{h}\frac{z-z_P}{[(x-x_P)^2+(y-y_P)^2+(z-z_P)^2]^{3/2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{[(x-x_P)+(y-y_P)]^{1/2}}-\frac{1}{[(x-x_P)+(y-y_P)+(h-h_P)]^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\{1-[1+(\frac{\Delta h}{r_0})^2]^{-\frac{1}{2}}\} \tag{5-2-15}$$

式中，$r_0=[(x-x_P)^2+(y-y_P)^2]^{-\frac{1}{2}}$；$\Delta h=h-h_P$。

地形坡度一般小于45°，即 $|\Delta h/r_0|<1$，将 $[1+(\frac{\Delta h}{r_0})^2]^{-\frac{1}{2}}$ 展开为幂级数为：

$$[1+(\frac{\Delta h}{r_0})^2]^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(\frac{\Delta h}{r_0})^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(\frac{\Delta h}{r_0})^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}(\frac{\Delta h}{r_0})^6+\cdots$$

略去六次以上的高次项后代入式(5-2-15)，再代入式(5-2-14)，则地形改正的积分公式变为：

$$\delta g_{\mathrm{TC}}=\frac{1}{2}G\rho\iint_{\sigma_{\mathrm{cap}}}\frac{\Delta h^2}{r_0^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{3}{8}G\rho\iint_{\sigma_{\mathrm{cap}}}\frac{\Delta h^4}{r_0^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-2-16}$$

式(5-2-16)可化为卷积的形式，在球面坐标系中按严密一维FFT(快速Fourier变换)计算局部地形改正，达到和空域内逐点积分精度相同的结果。

5.2.4 均衡改正

如果大地水准面以上的质量是引起重力异常的主要原因的话，那么加以Bouguer改正去掉重力场内的主要不规则部分Bouguer异常应该很小，但是实际情况却相反，在山区Bouguer异常总是负值，而且其绝对值也相当大。这说明在大地水准面以下的地壳质量对重力还有一定的影响，这部分质量和地面可见的地形质量存在着某种补偿关系。地壳均衡学说是根据大量实际观测资料提出的一种带有假定意义的理论解释。常用的地壳均衡学说有两种，一种是Pratt

地壳均衡学说，另一种是 Airy 地壳均衡学说。

Pratt 地壳均衡学说认为在地下某一深度处有一个等压面，由大地水准面到等压面的距离几乎处处相等，这个等压面称为“抵偿面”或“均衡面”。将地壳分割成截面相等的柱体，同一个柱体的密度是相等的，不同的柱体具有不同的密度，在地面高程大的地区柱体平均密度小些，在海洋柱体平均密度就大些，但各个柱体的质量是相等的。

Airy 地壳均衡学说由 Heiskanen 导出实用公式，称 Airy-Heiskanen 系统，现代大地测量多采用 Airy-Heiskanen 系统。Airy-Heiskanen 地形均衡补偿模型认为，地壳下部是岩浆层，密度为 3.27 g/cm³；岩浆层上面漂浮着地形物质，密度为地壳密度 2.67 g/cm³；地形物质高出大地水准面的部分是陆地上的实际地形，实际地形越高，沉入岩浆的部分越深；沉入岩浆的部分形状大致与可见地面地形相似，且相对岩浆面近似对称；山区陷入一定较深，海洋陷入一定较浅；质量的过剩与不足，是由陷入岩浆部分的高低来补偿。陷入岩浆部分与岩浆层的密度差为 $\Delta\rho = 0.60$ g/cm³，地形均衡改正就是计算这一虚拟（亏损）地形物质引力对地面重力观测点 P 重力的影响，亏损质量使点 P 的重力值减小，所以地形均衡改正总是正的。Airy-Heiskanen 地形均衡补偿模型如图 5-3 所示。

地形均衡改正与局部地形改正的积分公式推导过程相似，地形均衡改正积分公式为：

$$\delta g_{\mathrm{IC}} = G\Delta\rho \iint_{\sigma_{\mathrm{cap}}} \int_{D}^{D+d} \frac{z - z_P}{r^3} \mathrm{d}z \mathrm{d}\sigma \tag{5-2-17}$$

式(5-2-17)也可化为卷积的形式，在球面坐标系中按严密一维 FFT（快速 Fourier 变换）计算。

海洋地形均衡异常与陆海交界区的地形均衡异常模式与陆地相似，但要考虑海水层密度亏损和虚拟（过剩）地形物质引力对地面重力观测点 P 重力的影响。

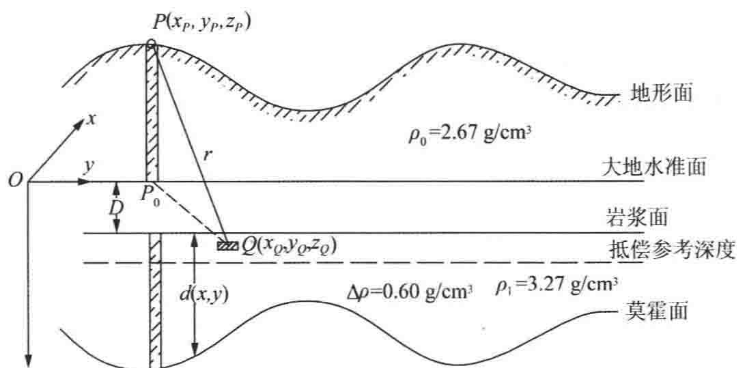


图 5-3　Airy-Heiskanen 地形均衡补偿模型

5.2.5 重力归算的间接效应

按 Stokes 理论确定大地水准面，要求大地水准面外部没有质量，同时知道大地水准面上的重力值。但重力测量是在地形表面进行的，必须对实测重力值进行相应的归算，移去大地水准面外的地形质量，同时将地面重力观测值归算到大地水准面上。由于重力归算过程中的地球质量分布变化引起的大地水准面高的改正，称为“重力归算的间接效应”。重力归算的间接效应可以用 Bruns 公式来表示：

$$\delta N = \frac{\delta W}{\bar{\gamma}} \tag{5-2-18}$$

式中：δW 是由于质量调整而引起大地水准面上的重力位变化；$\bar{\gamma}$ 是正常重力平均值。

图 5-4(a)表示点 P 的重力观测值。空间改正只考虑高度对重力的改正，相当于将大地水准面以外的质量按原状态压入大地水准面之内，如图 5-4(b)所示。在平均高程约为 1000 米的地区，空间改正引起的大地水准面的位移大约为 0.06 厘米，重力归算的间接效应是很微小的。

图 5-4(c)表示点 P 的 Faye 改正，Faye 改正相当于将点 P 周围

的地形削高填低。在中、小山区和平原地区间接效应较小，引起的大地水准面的位移为厘米级；在急剧起伏的地形情况下，应顾及地形引起的大地水准面变化。

图 5-4(d)表示点 P 的 Bouguer 改正，Bouguer 改正相当于去掉地面点和大地水准面之间物质层的质量。图 5-4(e)表示点 P 的均衡改正，将大地水准面外的质量压入海水面下，并且调整地壳内部密度来进行质量补偿。这两种重力归算较大地调整了地球外部的物质分布，间接效应甚大，一般地区可达到数米左右的量级。

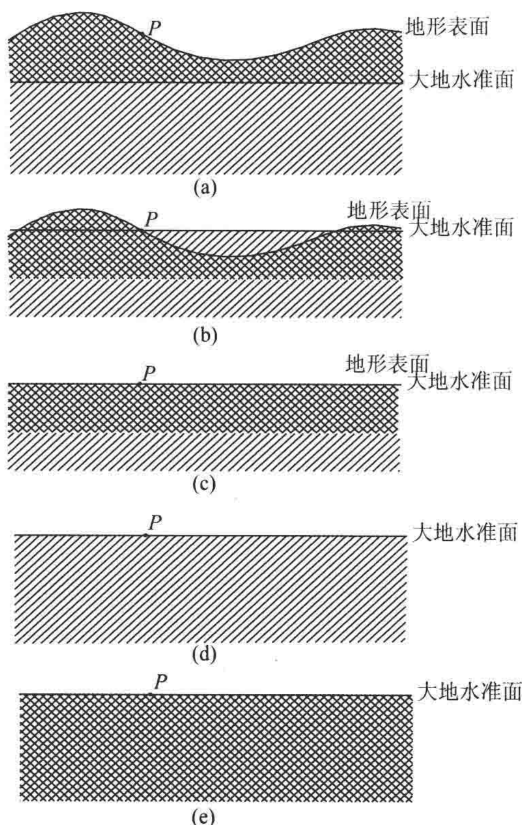


图 5-4　重力归算的物理意义



以上讨论说明，在 Stokes 和 Molodensky 理论中，采用空间重力异常和 Faye 重力异常求解大地水准面的形状是较好的，Bouguer 改正和均衡改正平滑度较高，可进行重力异常的内插和格网化。

5.2.6　地面重力观测值的格网化处理

地球内部的密度异常分布较为复杂，重力异常函数不可能用简单的函数表达，其变化带有一定的随机性。局部逼近拟合法只考虑一个插值点周围较小范围内的型值点，范围之外的型值点与插值点相关性小，影响也小。在均衡重力异常的拟合内插中，采用局部逼近方法，重在逼近拟合插值点周围函数的局部变化。Shepard 拟合插值模型是一种带权函数的插值估计公式，其具体表达式为：

$$\Delta g(\varphi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta g_i\cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}(0<d_i<R_0)\\ \Delta g_i\qquad(d_i=0)\end{cases}\tag{5-2-19}$$

式中，R_0 为选定的区域半径，称为“搜索半径”；权 p 取为格网点至型值点的距离 d 的倒数，即

$$p_i=1/(d_i+0.002)\ ,\ d_i<R_0\tag{5-2-20}$$

式(5-2-20)的分母内引入因子 0.002 是为了避免当 d 很小时权接近无穷大。

在山东省及邻区实测地面重力数据平均优于 5′×5′的分辨率，利用实测地面重力数据分别计算离散重力点的均衡重力异常，计算公式为：

$$\Delta g_I=g+\delta g_{\mathrm{F}}+\delta g_{\mathrm{BP}}+\delta g_{\mathrm{TC}}+\delta g_{\mathrm{IC}}-\gamma_0\tag{5-2-21}$$

将每个 5′×5′格网划分为 4 个 2.5′×2.5′的子格网，共 9 个结点，用离散的均衡重力异常值作为观测值，按 Shepard 拟合方法确定一个插值函数 $F(\varphi,\lambda)$，其中 φ,λ 为内插点的球面纬度和经度。用已知插值函数 $F(\varphi_i,\lambda_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 计算每个 2.5′×2.5′格网

结点上的均衡异常，其中 φ_i,λ_i 为第 i 个结点的球面坐标，m 为结点总数。

利用该区数字高程模型 DEM 计算 2.5′×2.5′格网结点的层间改正 $(\delta g_{\mathrm{BP}})_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$、局部地形改正 $(\delta g_{\mathrm{TC}})_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和均衡改正 $(\delta g_{\mathrm{IC}})_i(i=1,2,\cdots,m)$，$m$ 为 2.5′×2.5′格网数。同时计算 5′×5′格网结点局部地形改正平均值 $(\overline{\delta g}_{\mathrm{TC}})_k(k=1,2,\cdots,n)$，$n$ 为 5′×5′格网数，则有

$$(\overline{\delta g}_{\mathrm{TC}})_k=\frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9}(\delta g_{\mathrm{TC}})_j \tag{5-2-22}$$

$(\overline{\delta g}_{\mathrm{TC}})_k$ 将用于恢复 Faye 异常 Δg_{FA}。将每个 2.5′×2.5 格网结点的均衡重力异常按地面重力归算的反过程恢复为大地水准面上和地面空间重力异常，即：

$$\Delta g_{\mathrm{F}}=\delta g_{\mathrm{I}}-\delta g_{\mathrm{IC}}-\delta g_{\mathrm{TC}}-\delta g_{\mathrm{BP}} \tag{5-2-23}$$

将每个 5′×5′格网中 4 个 2.5′×2.5 子格网共 9 个结点的空间重力异常取平均，若在 5′×5′格网中有 r 个实测点的空间重力异常，则和结点值一并取平均，即：

$$\overline{\Delta g}_{\mathrm{F}}=\frac{1}{9+r}\sum_{j=1}^{9+r}(\Delta g_{\mathrm{F}})_j \tag{5-2-24}$$

这样，通过地面重力归算和格网化处理形成 5′×5′格网平均空间重力异常。格网化的山东省及邻区 5′×5′陆地、海洋空间重力异常等值线如图 5-5 所示。

山东省及邻区地面实测重力数据平均分辨率为 5′×5′，海洋重力数据部分为实测海洋重力数据归算和格网化结果，山东省及邻区 5′×5′陆地、海洋空间重力异常作为计算该区域重力似大地水准面的基础数据。

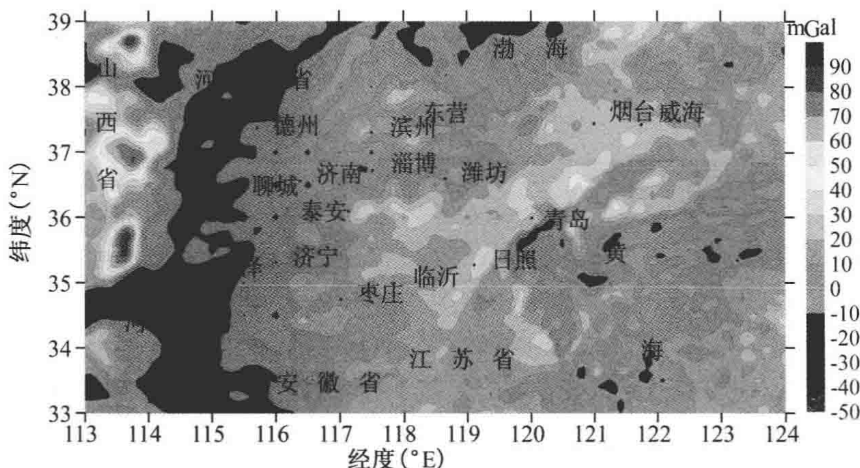


图 5-5 山东省及邻区 5′×5′陆地、海洋空间重力异常等值线图

5.3 地形起伏对局部大地水准面的影响

5.3.1 数字高程模型(DEM)GTOPO30

GTOPO30 是全球 30″(小于 1 km)格网数字高程模型，由美国地质调查局(USGS)地球资源观测和科学研究中心(EROS)根据地形信息的光栅和矢量源数据经三年时间努力计算的成果。GTOPO30 的高程单位为相对于平均海水面(MSL)的单位米，平面基准是 WGS-84。GTOPO30 的精度没有一个统一的标准，它取决于各个局部区域的源数据的精度，一般平原区域精度为±30 m，山区和丘陵精度为±50 m。为便于数据利用，GTOPO30 在全球共分为 33 个小片，南纬 60°至北纬 90°和西经 180°至东经 180°范围内以 27 个数据小片覆盖，每个小片覆盖纬度 50°和经度 40°。这里使用的是 E100N40 片数据。

海洋深度数据利用美国国家地球物理信息中心(NGDC)根据卫

星测高数据确定的 2′× 2′全球格网数字高程海深模型 ETOPO2 中的山东省近海数据。山东省及邻区地面高程、海洋深度影像如图5-6所示。

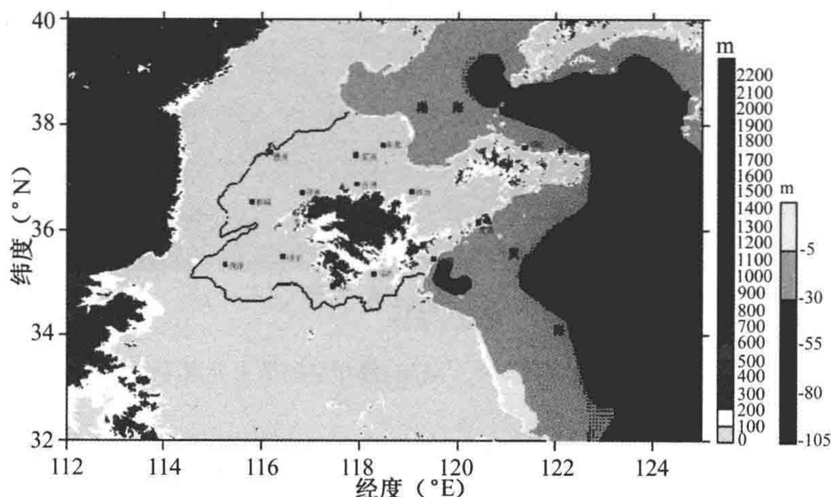


图 5-6 山东省及邻区地面高程、海洋深度影像图

5.3.2 球谐形式的地形改正公式

地形起伏反映了重力场的不规则变化，应用 Stokes 公式计算大地水准面的前提是大地水准面外部不存在质量，这就需要对实测重力数据进行地形改正，在确定高精度局部(似)大地水准面过程中，甚至还要顾及地壳密度横向不均匀变化的影响。

L. E. Sjöberg(1994)提出利用球谐方法计算地形改正的思想，并于1995 年推出顾及高程二次幂的球谐形式的地形改正公式。H. Nahavandchi 和 L. E. Sjöberg(1998)推出顾及高程三次幂的球谐形式的地形改正公式，同时也给出球谐展开级数中对地形改正起主要作用的是高程的平方项的结论。顾及高程三次幂的地面点 P 的重力直接地形改正、对大地水准面的直接影响和间接影响计算公式分别为：



$$\delta g_P = -\frac{\pi G\rho}{2R}\left[5H_P^2 + 3\bar{H}_P^2 + 2\sum_{n,m} n\,(H^2)_{nm}Y_{nm}(P)\right]$$
$$+\frac{\pi G\rho}{2R^2}\left[\frac{28}{3}H_P^3 + \frac{9}{2}\bar{H}_P^2 H_P - \frac{1}{2}\bar{H}_P^3\right.$$
$$\left. + H_P\sum_{n,m} n(2n+9)\,(H^2)_{nm}Y_{nm}(P) - \frac{1}{3}\sum_{n,m} n(2n+7)\,(H^3)_{nm}Y_{nm}(P)\right] \tag{5-3-1}$$

$$\delta N_{\text{dir}}(P) = -\frac{2\pi G\rho}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{n+2}{2n+1}(H^2)_{nm}Y_{nm}(P)$$
$$-\frac{2\pi G\rho}{R\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{(n+2)(n+1)}{3(2n+1)}(H^3)_{nm}Y_{nm}(P) \tag{5-3-2}$$

$$\delta N_{\text{ind}}(P) = -\frac{2\pi G\rho}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{n-1}{2n+1}(H^2)_{nm}Y_{nm}(P)$$
$$+\frac{2\pi G\rho}{3R\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{n(n-1)}{2n+1}(H^3)_{nm}Y_{nm}(P) \tag{5-3-3}$$

以上三式中，Y_{nm} 是完全正规化的球函数，并服从下式：

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma} Y_{nm}Y_{n'm'}\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases}1, & \text{当 } n=n' \text{ 和 } m=m' \text{ 时}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5-3-4}$$

和

$$(H^v)_{nm} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma} H_P^v Y_{nm}\,\mathrm{d}\sigma\text{，其中 } v=2,3 \tag{5-3-5}$$

$$H_P^v = \sum_{n,m}(H^v)_{nm}Y_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty}H_n^v(P)\text{，其中 } v=2,3 \tag{5-3-6}$$

$$\bar{H}_P^v = \sum_{n,m}\frac{1}{2n+1}(H^v)_{nm}Y_{nm}(P) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}H_n^v(P)\text{，其中 } v=2,3 \tag{5-3-7}$$

以上各式中，$\rho=2.67\ \mathrm{g/cm^3}$ 为地壳密度；H 和 H_P 分别是流动点和计算点的海拔高程；n 为勒让德多项式的阶。球谐形式的地形改正公式解决的是经典地形改正公式中积分核奇异和平面近似的问题，但全球 DEM 分辨率有限，球谐形式的地形改正公式只能展开到

一定阶次，仅包含地形改正的长波部分。精确地计算地形改正应该将球谐展开和经典的积分公式结合，计算点附近的内区采用经典积分公式，而外区按球谐展开模型计算。

5.3.3 地形起伏的直接影响与间接影响

移去大地水准面外部地形质量的影响称为地形的直接影响；而恢复地形质量带来的影响称为间接影响(其中包括大地水准面与调整大地水准面的差异)。由于距离地面点较远区域的地形起伏对重力的影响很小，且远区的地形对相邻地面点的影响具有相关性，区域(似)大地水准面精化主要确定大地水准面高(高程异常)的相对变化，本节在计算地形改正时仅考虑局部地形改正，略去六次以上的高次项的重力局部地形改正的积分公式为：

$$\delta g_{\mathrm{TC}} = \frac{1}{2}G\rho\iint\limits_{\sigma_{\mathrm{cap}}}\frac{\Delta h^2}{r_0{}^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{3}{8}G\rho\iint\limits_{\sigma_{\mathrm{cap}}}\frac{\Delta h^4}{r_0{}^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

按式(5-3-8)计算的山东省及邻近区域的重力局部地形改正如图 5-7 所示。

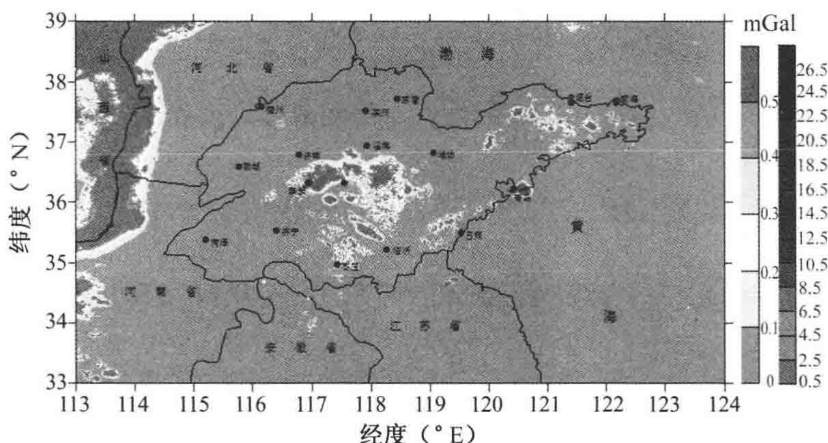


图 5-7 数字地形模型计算的重力局部地形改正



地形起伏对引起的重力局部地形改正的研究区域为 0.00～27.38 mGal，平均值为 0.1936 mGal，均方根为 0.7795 mGal。由图 5-7 与图 5-1 的比较可以看出，重力局部地形改正与地形本身强相关，地形起伏越剧烈的地区重力局部地形改正越大。重力局部地形改正引起的大地水准面的变化（地形对大地水准面的直接影响）可按下式进行计算：

$$\delta N_{\mathrm{dir}} = \frac{1}{4\pi\gamma R}\iint_{\sigma}\delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{5-3-9}$$

式中，γ 为正常重力均值；$S(\varphi)$ 为 Stokes 函数；δg 为延拓到大地水准面上的重力地形改正。

采用 Helmert 凝聚改正法，地形起伏对大地水准面的间接影响的计算式为：

$$\delta N_{\mathrm{ind}} = -\frac{\pi G\rho}{\gamma}h_P^2 - \frac{G\rho}{6\gamma}\iint_{\sigma}\frac{h^3 - h_P^3}{r^3}\mathrm{d}\sigma + \frac{3G\rho}{40\gamma}\iint_{\sigma}\frac{h^5 - h_P^5}{r^5}\mathrm{d}\sigma + \cdots \tag{5-3-10}$$

式中，h_P 为固定点高程；h 为流动点高程；地壳密度 ρ 近似取 2.67 g/cm^3；γ 为平均正常重力，r 为计算点与流动点的距离。利用山东省及邻近区域 30″×30″数字高程模型计算的地形起伏对大地水准面的间接影响如图 5-8 所示。

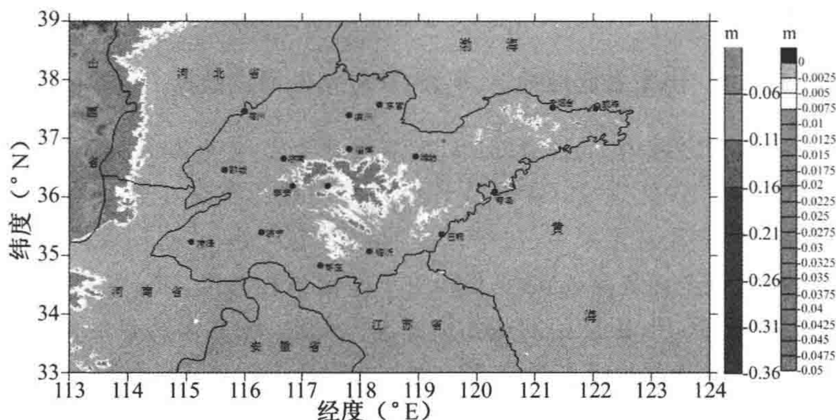


图 5-8 数字高程模型计算的地形起伏对大地水准面的间接影响

地形起伏对大地水准面的间接影响的研究区域为－0.0312～0.000 m，平均值为－0.0044 m，均方根为0.0193 m。由图5-8与图5-1的比较可以看出，地形起伏对大地水准面的间接影响与地形起伏也是强相关的，地形起伏越剧烈的地区对大地水准面的间接影响越大。数字高程模型的分辨率对计算地形改正也有很大影响，低分辨率DEM损失部分高频信息，对于山区局部地形改正的计算应尽可能地采用较高分辨率的DEM。一般来说，用于计算地形改正的DEM的分辨率至少应该是要计算大地水准面分辨率的2～5倍。

5.4 GPS/水准数据

我国法定的高程系统是正常高系统，参考面是似大地水准面，这个面相对参考椭球面的起伏为高程异常，高程异常是大地高与正常高的差异。GPS基线向量经过网平差得到高精度的大地高程，再通过精密水准测量获得GPS网点的正常高程，这样就得到离散的GPS/水准点作为高程异常控制点。在本节的研究工作中，共收集到山东省区域内A、B级GPS/水准网点106点和L、T两市的C级GPS/水准网数据，用于选择最适合本区域的全球重力场模型和重力似大地水准面与GPS/水准似大地水准面拟合的研究。

5.4.1 山东省区域内A、B级GPS/水准网点数据

山东省区域内A、B级GPS/水准网观测工作于2005年8月开始，2006年10月完成，GPS A、B级控制网点的布设在兼顾均匀原则下，主要布设在国家一、二等水准路线的结点处，并对国家二等水准路线进行全面复测，高程采用1985国家高程基准。GPS A、B级网采用基于GPS跟踪站的观测模式进行观测，其中A级点观测120小时(5天5夜)，B级点观测72小时(3天3夜)。GPS网数据处理完成后，将各GPS点的地心坐标转换为1980西安坐标系坐标。收集到的山东省区域内GPS A级网点共6点，B级网点101点(其中



一点没有高程数据)，可应用 GPS/水准点(高程异常控制点)为 106 点，A、B 级 GPS/水准网点的分布情况如图 5-9 所示。

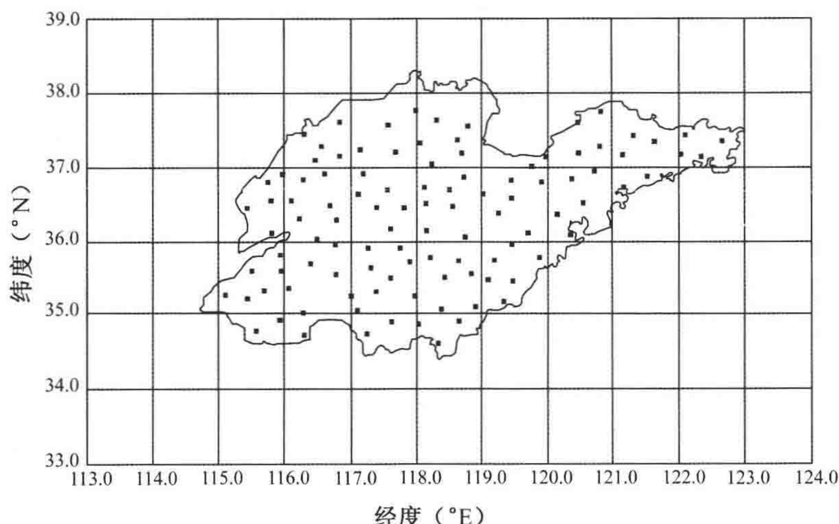


图 5-9　山东省区域内 A、B 级 GPS/水准网点分布示意图

5.4.2　山东省 L 市 GPS/水准数据

山东省 L 市位于黄河冲积平原，地形比较平坦，没有大的起伏。在该区域内共布设 GPS/水准网点 81 点(联测济南市和山东省 T 市 C 级 GPS 网点 5 点，联测新布设 B 级 GPS 网点 7 点)。点间平均距离约 10 千米。该 C 级 GPS 网采用 Leica 双频 GPS 接收机施测，作业方式为经典静态相对定位测量，卫星截止高度角为 10 度，采样间隔为 15 秒，每个点位均观测两个时段 6 个小时以上，基线处理和平差采用 GPSuvery 软件进行计算，控制网在 WGS-84 下无约束平差，点位中误差的数量级为毫米级。该市 C 级 GPS 控制点以三等精度进行了水准观测，高程系统采用 1985 国家高程基准。平差后最大高程中误差为±0.0231 m，最大高差中误差为±0.0164 m。山东省 L 市 C 级 GPS 控制网及三等水准路线如图 5-10 所示。

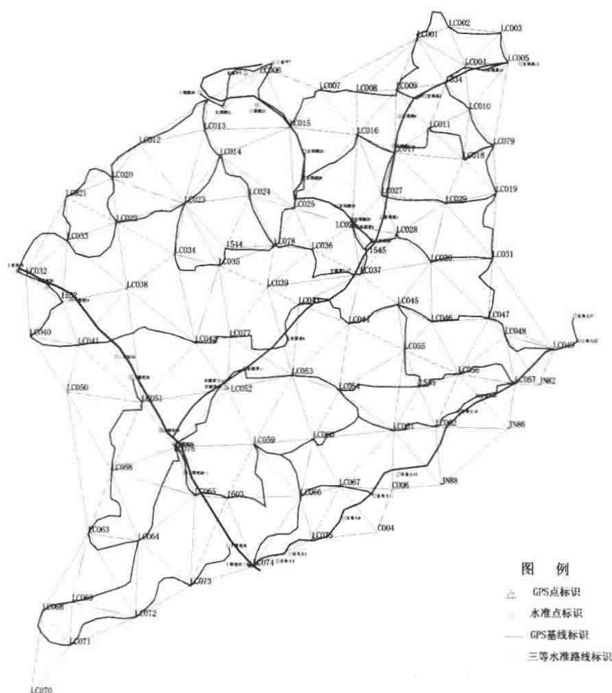


图 5-10　山东省 L 市 C 级 GPS 控制网及三等水准路线图

5.4.3　山东省 T 市 GPS/水准数据

山东省 T 市大部分位于鲁中山区，地势自东北向西南倾斜。山地和丘陵占全市面积的 59.4%，最高海拔 1500 多米，相对高度 1400 米，为山东省第一高峰。T 市 C 级 GPS 控制网由 129 个 C 级 GPS 点组成，由于该区域地形较复杂，只有其中的 51 点进行了水准观测，所以该区域有 51 个 GPS/水准点可以利用。T 市 C 级 GPS 控制网采用 Leica 双频 GPS 接收机施测，点间平均距离约 10 千米，作业方式为经典静态相对定位模式，卫星截止高度角为 10 度，采样间隔为 15 秒，每个点位均观测两个时段 2 个小时以上，基线处理和平差采



用 GPSuvery 软件进行计算，控制网在 WGS-84 下无约束平差，点位中误差的数量级为毫米级。该市 C 级 GPS 控制网点以三等精度进行了水准观测，高程系统采用 1985 国家高程基准。平差后最大高程中误差为±0.0241 m，最大高差中误差为±0.0230 m。山东省 T 市 C 级 GPS 控制网及三等水准路线如图 5-11 所示。

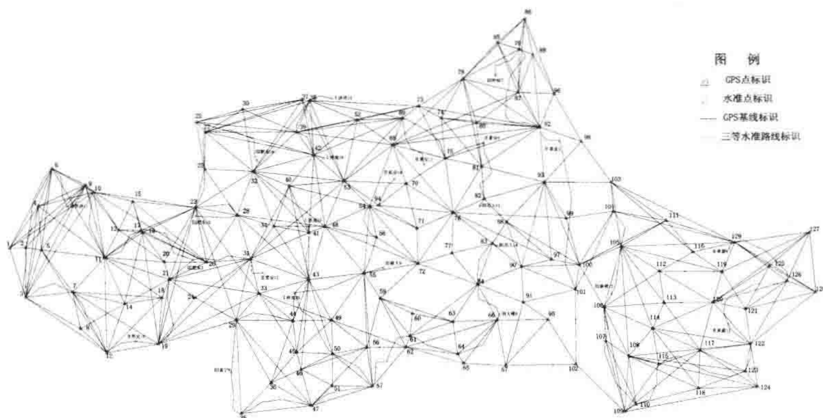


图 5-11 山东省 T 市 C 级 GPS 控制网及三等水准路线图

值得说明的是，山东省 L、T 两市的 C 级 GPS 控制网数据单独平差并相对独立，本节在应用的过程中分别利用两市的 GPS/水准数据对 Bayesian 正则化 BP 神经网络的初始条件对两类似大地水准面拟合结果的影响进行研究，并分别代表山区和平原区对全省似大地水准面结果进行精度统计。

5.5 地球重力场模型表示山东省及邻区局部重力场的比较

在确定区域(似)大地水准面过程中选择最适合本区域的全球重力场模型是很有必要的，在本节的研究中，共收集到四个全球重力场模型，分别是 EGM96、EIGEN-CG01C、EIGEN-CG03C 和 IGG05B

重力场模型。

EGM96 重力场模型是美国国家宇航局利用卫星跟踪数据、海洋卫星测高观测值以及各国的地面重力观测数据联合计算的 360 阶全球重力场模型，是目前国际上普遍采用的国际参考模型。

EIGEN-CG01C 模型是德国地球科学中心最新推出的 360 阶全球重力场模型，它是采用 GRACE 和 CHAMP 卫星重力探测数据、卫星测高数据和地面重力测量数据联合解算得到的全球重力场模型。

EIGEN-CG03C 重力场模型是 EIGEN-CG01C 的升级模型，使用了更多的 GRACE 卫星数据(376 天)，完全到 360 阶次，确定的大地水准面和重力异常波长为 110 km。其描述地球表面 100 km 大地水准面精度为 30 cm、重力异常为 8 mGal。

IGG05B 是中国科学院测量与地球物理研究所最新研制的重力场模型，该模型以最新的重力卫星数据计算的 EIGEN-CG03C 为参考模型，补充全球重力异常和中国陆地和海洋区域的 $30' \times 30'$ 重力异常数据，采用“移去-恢复”积分方法以及综合谱权法计算得到的新模型，应用到 360 阶次。

5.5.1 模型重力异常与格网重力异常的比较

扰动位模型的球谐展开式为：

$$T = \frac{fM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{\mathrm{P}}_{nm}(\cos\theta) \quad (5\text{-}5\text{-}1)$$

式中，fM 为地心引力常数；a 为参考椭球长半径；θ,λ 和 r 分别是计算点的极距、地心经度和向径；$\bar{C}_{nm}$ 和 $\bar{S}_{nm}$ 为完全规格化重力场模型位系数；$\bar{\mathrm{P}}_{nm}(\cos\theta)$ 是完全规格化缔合勒让德函数。Δg 和 T 之间存在关系式：

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{a} T \quad (5\text{-}5\text{-}2)$$



将式(5-5-1)代入(5-5-2)得到重力位系数模型计算模型空间重力异常的公式：

$$\Delta g_{\mathrm{M}} = \frac{fM}{r^2}\sum_{n=2}^{360}\left(\frac{a}{r}\right)^n(n-1)\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{\mathrm{P}}_{nm}(\cos\theta) \tag{5-5-3}$$

分别利用 EGM96、EIGEN-CG01C、EIGEN-CG03C 和 IGG05B 重力场模型计算山东省及邻近区域(东经 113°～124°；北纬 33°～39°)5′×5′格网结点的模型空间重力异常 Δg_{M}。四个重力场模型的格网结点的模型空间重力异常与山东省及邻区地面格网化空间重力异常差值统计结果列于表 5-1。

表 5-1　重力场模型计算的重力异常与实测格网化重力异常的比较结果

单位：mGal

重力场模型	最大值	最小值	平均值	均方根	标准差
EGM96	95.290	－43.520	8.371	16.658	±14.402
EIGEN-CG01C	96.450	－43.880	7.936	15.836	±13.704
EIGEN-CG03C	95.580	－43.030	8.079	15.859	±13.647
IGG05B	93.841	－41.990	8.121	15.422	±13.111

从表中数据可以得出结论：重力场模型计算的空间重力异常和实测数据格网化的空间重力异常存在系统偏差；EIGEN-CG01C、EIGEN-CG03C 和 IGG05B 含有重力卫星数据信息模型在表达研究区域局部重力场的精度明显优于 EGM96 模型；而在 EIGEN-CG01C、EIGEN-CG03C 和 IGG05B 模型的比较中，IGG05B 更优。

5.5.2　模型高程异常与 GPS/水准数据的比较

利用收集到的 106 个山东省区域内高程异常控制网点的大地高 H 和水准测量测定的正常高 h 可计算实测高程异常为

$$\zeta_{\mathrm{obs}} = H - h \tag{5-5-4}$$

由地球重力场模型可计算任意一点的模型高程异常：

$$\zeta_{M}=\frac{fM}{r\cdot\gamma}\sum_{n=2}^{360}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \tag{5-5-5}$$

式中，γ 为计算点似地形表面上正常重力；其他各项含义同式(5-5-1)。在山东省区域内 106 个 GPS A、B 级点上计算的实测高程异常和四个重力场模型计算的高程异常的比较结果列于表 5-2。

表 5-2　实测高程异常和四个重力场模型计算的高程异常的比较结果　单位：m

重力场模型	最大值	最小值	平均值	标准差
EGM96	1.170	−0.247	0.386	0.350
EIGEN-CG01C	0.910	−0.088	0.355	0.201
EIGEN-CG03C	1.004	−0.097	0.385	0.213
IGG05B	0.868	−0.048	0.385	0.186

从表中数据可以看出，由于重力场模型(似)大地水准面和水准测量高程基准面的不同，重力场模型长波分量的误差等影响，重力场模型计算的高程异常和实测值之间存在明显的系统偏差。从标准差的比较来看，包含有重力卫星数据信息的地球重力场模型明显地提高了长波分量的精度，EIGEN-CG01C、EIGEN-CG03C 和 IGG05B 模型在研究区域的精度明显比 EGM96 模型高。由于 IGG05B 模型建立过程中使用了更多的我国陆地和海洋重力数据，表达山东省及邻近区域局部重力场的精度最高。

通过模型和实测数据进行比较，IGG05B、EIGEN-CG01C 和 EIGEN-CG03C 在表达山东省及邻近区域局部重力场的精度明显比 EGM96 精度要高；EIGEN-CG01C 和 EIGEN-CG03C 的精度基本相当；IGG05B 的精度最高。最后确定 IGG05B 模型作为计算山东省及邻近区域高精度(似)大地水准面的首选参考重力场模型。

第6章　山东及邻近区域重力(似)大地水准面的确定

6.1　重力(似)大地水准面计算方案

6.1.1　计算方案

精确地确定区域(似)大地水准面需要高阶地球重力场模型作为参考场,专用于重力计划的卫星发射前。静态地球重力场模型主要是利用地面卫星跟踪资料获取地球重力场的长波部分,利用地面重力观测和卫星测高等资料获取地球重力场的中、短波部分。由于数据来源复杂,精度不统一及缺乏覆盖全球的高精度观测数据,制约了重力场模型的空间分辨率和精度。专用于重力计划的卫星 CHAMP 和 GRACE 的发射,提高了重力场模型长波部分的精度。EIGEN-CG03C 重力场模型是采用 GRACE 和 CHAMP 卫星重力探测数据、卫星测高数据和地面重力测量数据联合解算得到的全球重力场模型,完全到 360 阶次,确定的大地水准面和重力异常波长为 110 km。其描述地球表面 100 km 大地水准面精度精度为 30 cm、重力异常为 8 mGal。IGG05B 是以 EIGEN-CG03C 为参考模型,补充全球重力异常和中国陆地和海洋区域的 $30' \times 30'$ 重力异常数据,计算得到的新模型。在本研究中,选用 IGG05B 作为参考重力场模型。

移去-恢复技术是重力(似)大地水准面确定中广泛应用的技术,

这种方法是利用重力场的可叠加性原理，分别处理不同波长成分的贡献。首先，利用高阶地球重力场模型作为参考场，从观测重力异常中移去模型重力异常值，模型重力异常代表长波部分；再利用数字高程模型(DEM)移去地形起伏对重力观测影响的短波分量，将剩余的残差重力异常进行拟合推估，内插形成格网数据，应用残差重力异常格网数据按 Stokes 公式和 Molodensky 公式计算残差大地水准面高和高程异常，重力(似)大地水准面结果为位模型(似)大地水准面高加上 DEM 数据和残差重力异常对(似)大地水准面的贡献。移去-恢复方法的实质是利用高分辨率的重力观测数据和 DEM 数据改进由位模型确定的(似)大地水准面，主要改进短波分量。

局部重力场逼近计算中的基本积分公式都可化为卷积形式，采用 FFT(Fast Fourier Transformation)技术进行计算。FFT 技术在物理大地测量中的应用，使得局部重力场逼近克服了计算量庞大这一最大障碍，在重力场逼近方面出现的 FFT 方法主要有二维平面 FFT、二维球面 FFT、多带球面 FFT、一维球面 FFT。其中由于二维平面 FFT 把地面作为平面，对核函数作的近似太大，故计算出的结果精度较低。二维球面 FFT 和多带球面 FFT 计算过程中也有近似处理，计算结果的精度仍然有所损失，一维球面 FFT 是传统积分方法和二维 FFT 的结合，可以在球面上精确地计算卷积。在本节研究的计算中，根据数字地面模型和重力数据的分辨率情况，使用严格积分方法进行计算，保证了计算精度。基于以上分析，山东省及邻近区域重力(似)大地水准面的计算方案拟采用以下原则：

(1)采用移去-恢复方法计算重力(似)大地水准面；

(2)采用 $5'\times5'$ 格网重力异常作为计算重力(似)大地水准面的基础数据；

(3)采用 Stokes 公式计算重力大地水准面；

(4)采用 Molodensky 公式计算重力似大地水准面；

(5)数值计算采用严格积分方法进行；

(6)选用 IGG05B 全球重力场模型作为参考重力场模型。



6.1.2 基本参数

在计算过程中，高程基准采用 1985 国家高程基准，椭球基准采用 WGS-84 椭球。WGS-84 椭球有关参数值如下：

地球椭球长半径：$a = 6378137$ m

地球椭球扁率：$e = 1/298.257223563$

地球动力因子（去除永久潮汐变形后）：

$J_2 = 108262.9989051944 \times 10^{-8}$

地球引力常数：$GM = 3.986004418 \times 10^8\ \mathrm{m^3/s^2}$

地球自转角速度：$\omega = 7.292115 \times 10 - 5$ rad/s

正常重力平均值：$\bar{\gamma} = 978764.4656$ mGal

地壳平均密度：$\rho = 2.67\ \mathrm{g/cm^3}$

6.2 重力大地水准面的确定

6.2.1 IGG05B 模型空间重力异常

首先由 IGG05B 重力场模型位系数计算山东省及邻区（东经 113°～124°；北纬 33°～39°）2.5′×2.5′格网结点的模型空间重力异常，计算公式为(5-5-3)，取每个 5′×5′格网中子格网结点空间重力异常的算术平均值作为 5′×5′格网模型空间重力异常结果，模型重力异常代表重力变化的长波部分，山东省及邻区 5′×5′IGG05B 模型陆地、海洋空间重力异常等值线图如图 6-1 所示。

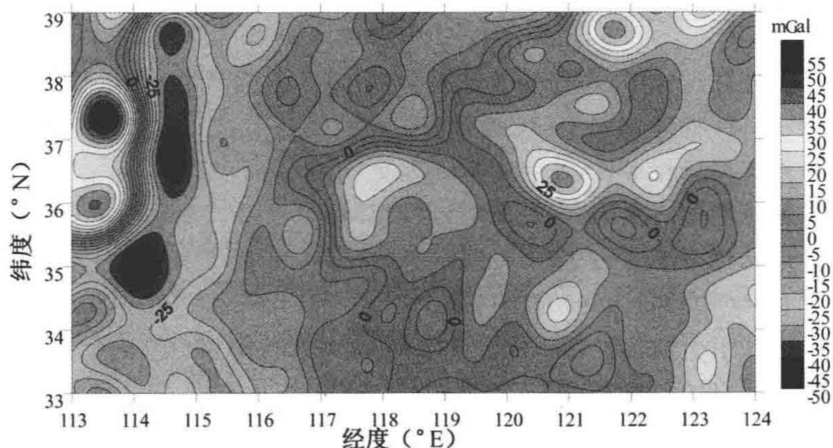


图 6-1 山东省及邻区 IGG05B 模型陆地、海洋空间重力异常等值线图

6.2.2 格网化空间重力异常

利用地面实测重力数据和高分辨率的数字高程模型（DEM）数据通过空间改正、层间改正、局部地形改正和均衡改正等重力归算过程，获得离散点的均衡重力异常作为已知（采样）值；然后采用局部拟合内插法，确定 5′×5′格网结点均衡重力异常；再在格网结点上通过上述重力归算的反过程，得到大地水准面和似地形面上 5′×5′格网空间重力异常。山东省及邻区地面实测重力数据平均分辨率优于 5′×5′，海洋重力数据为实测海洋重力数据归算结果。山东省及邻区 5′×5′陆地、海洋空间重力异常作为计算该区域重力（似）大地水准面的基础数据，空间重力异常等值线如图 6-2 所示。

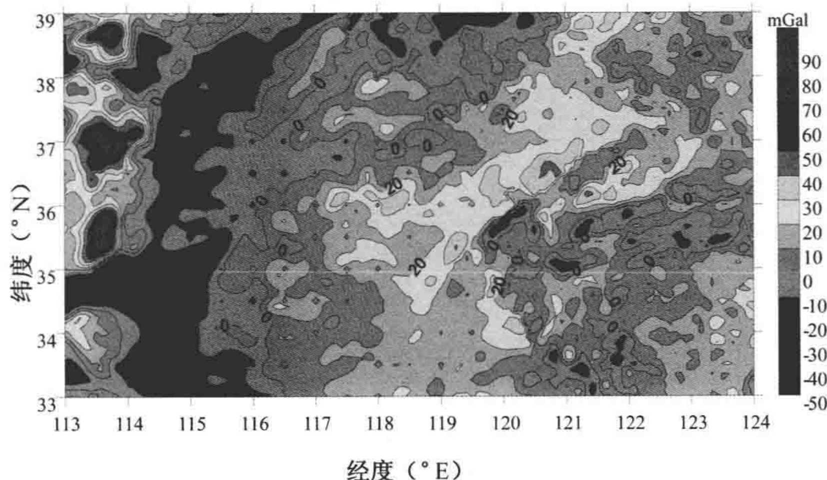


图 6-2　山东省及邻区陆地、海洋格网化空间重力异常等值线图

6.2.3　残差空间重力异常

将重力异常数据分为三部分：第一部分是地球重力场模型计算的模型重力异常 Δg_M，这是重力异常的长波部分，第二部分是数字高程模型(DEM)计算的局部地形改正 $\delta\Delta g_{TC}$，这是重力异常变化的短波部分；第三部分是由实测重力异常分别移去第一和第二部分重力异常的得到的残差 Faye 异常 $\delta\Delta g_{FA}$。计算公式为：

$$\delta\Delta g_{FA} = \Delta g_F - \Delta g_M + \delta\Delta g_{TC} \tag{6-2-1}$$

山东省及邻区 5′×5′陆地、海洋空间 Faye 重力异常等值线如图 6-3 所示。

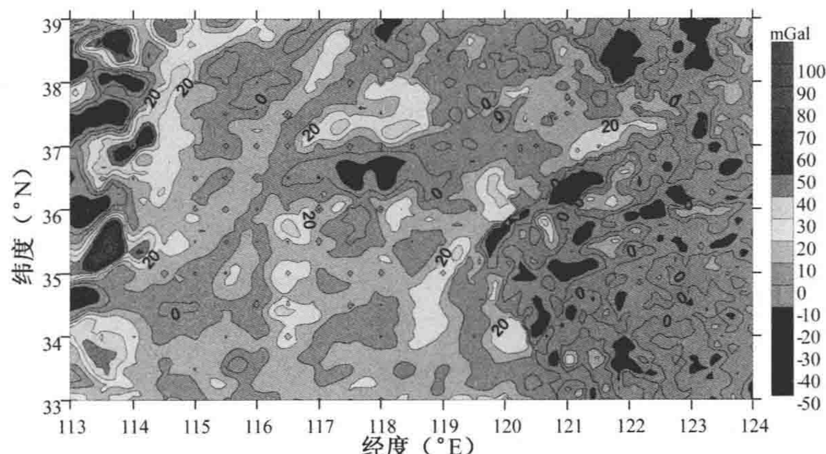


图 6-3　山东省及邻区陆地、海洋空间 Faye 重力异常等值线图

6.2.4　Stokes 公式积分的改化

用 Stokes 公式计算大地水准面要进行全球积分，这意味着每计算一点的大地水准面就需要全球的重力数据，由于重力数据不可能连续的全球分布，而且为了提高计算速度，需要对 Stokes 公式积分进行改化。由于远区的重力异常只影响大地水准面的长波项，远区的重力异常可用高精度的全球重力场位系数计算的模型重力异常代替。

大地水准面高的计算分解为三个部分计算，即中、长波分量，短波分量和残余分量。中、长波分量可用一个全球重力位模型计算确定，以 N_M 表示，所采用位模型称为“参考场”；短波分量利用数字高程模型(DEM)数据计算，用 δN_T 表示；剩余部分由残差 Faye 异常按 Stokes 公式确定，用 δN_r 表示。重力异常 Δg 相应地也分解为三个部分，即位模型计算的模型重力异常 $\delta \Delta g_M$，地形起伏引起的重力变化(局部地形改正) $\delta \Delta g_T$，和残差重力异常 $\delta \Delta g_r$。具体表达式为：

$$N = N_M + \delta N_T + \delta N_r \qquad (6\text{-}2\text{-}2)$$



$$\Delta g = \Delta g_{M} + \delta\Delta g_{T} + \delta\Delta g_{r} \tag{6-2-3}$$

式中，$\delta\Delta g_{T}$ 和 $\delta\Delta g_{TC}$ 大小相等，符号相反。

Stokes 公式可表达为：

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma}\Delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{6-2-4}$$

将积分区域分为内区 σ_0 和外区 σ_1，内区积分半径为 ε_0，由于远区（外区）的重力异常只影响大地水准面的长波项，外区重力异常可用高精度的全球重力场位系数计算的模型重力异常代替。内区积分为实测重力异常。远区的地形改正对重力和大地水准面的影响也很小，只考虑内区的地形起伏的影响，则：

$$\Delta g = \begin{cases}\Delta g_{M} + \delta\Delta g_{T} + \delta\Delta g_{r},\ 0 < \varphi < \varepsilon_0 \\ \Delta g_{M},\varphi > \varepsilon_0\end{cases} \tag{6-2-5}$$

对于式(6-2-2)中的 N_{M}，可由全球重力位系数模型按下式计算：

$$N_{M} = \frac{fM}{r\cdot\gamma}\sum_{n=2}^{360}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}(\bar{C}_{nk}\cos k\lambda + \bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{P}_{nk}(\cos\theta) \tag{6-2-6}$$

由于远区的地形改正对重力影响很小，只考虑内区的地形起伏对重力的影响：

$$\delta g_{TC} = \frac{1}{2}G\rho\iint_{\sigma_{cap}}\frac{\Delta h^2}{r_0{}^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{3}{8}G\rho\iint_{\sigma_{cap}}\frac{\Delta h^4}{r_0{}^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-2-7}$$

$$\delta N_{TC} = -\frac{\pi G\rho}{\gamma}h_p^2 - \frac{G\rho}{6\gamma}\iint_{\sigma}\frac{h^3 - h_p^3}{r^3}\mathrm{d}\sigma + \frac{3G\rho}{40\gamma}\iint_{\sigma}\frac{h^5 - h_p^5}{r^5}\mathrm{d}\sigma + \cdots \tag{6-2-8}$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma}\Delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_1}\Delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_1}\Delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_1}\Delta g_{M} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\Delta g S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_1}\Delta g_{M} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\Delta g_{M} + \delta\Delta g_{TC} + \delta\Delta g_{r} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma_1+\sigma_0} \Delta g_{\mathrm{M}} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma_0}\delta\Delta g_{\mathrm{TC}} + \delta\Delta g_{\mathrm{r}} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \\
&= N_{\mathrm{M}} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma_0}\delta\Delta g_{\mathrm{TC}} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma_0}\delta\Delta g_{\mathrm{r}} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \\
&= N_{\mathrm{M}} + \delta N_{\mathrm{TC}} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma_0}\delta\Delta g_{\mathrm{r}} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
\tag{6-2-9}
$$

式中，$\delta\Delta g_{\mathrm{r}} = \Delta g_{\mathrm{F}} - \Delta g_{\mathrm{M}} + \delta\Delta g_{\mathrm{TC}}$；$\mathrm{d}\sigma$ 为单位球面面元；$S(\varphi)$ 为 Stokes 函数。式(6-2-9)即为利用残差 Faye 异常计算大地水准面差距的公式。

6.2.5 重力大地水准面的确定

应用 Stokes 公式，由 $5'\times5'$ 格网残差 Faye 异常，计算每个 $2.5'\times2.5'$ 格网结点的残差大地水准面高，积分半径取为 $50'$，重力大地水准面高结果为残差大地水准面高、模型大地水准面高和局部地形影响三部分之和。山东省及邻近区域重力大地水准面最后结果如图 6-4 所示。

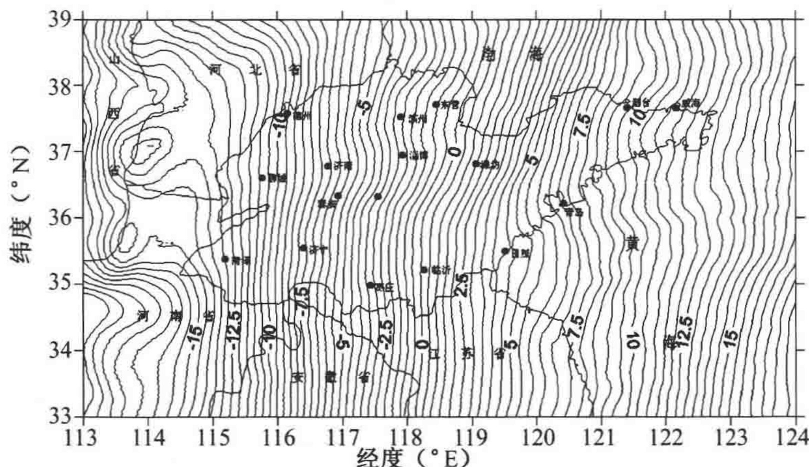


图 6-4　山东省及邻近区域重力大地水准面等值线图



6.3　重力似大地水准面的确定

6.3.1　高程异常的线性 Molodensky 级数解

Molodensky 边值问题是一个非线性自由边值问题，其中重力 g 和重力位 W 都是地球自然表面上的非线性函数，需要采用线性化方法建立线性边值条件。通过引入已知的似地球表面和正常重力位，将自由边值问题转化为固定边值问题，并应用 Taylor 级数顾及它们与地球表面和重力位的线性项来解算扰动位。由于边界面（似地球表面）比较复杂，解算扰动位根据积分方程用逐次趋近法解算，Molodensky 球近似下的级数解可表示为：

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots \tag{6-3-1}$$

$$\begin{cases} \zeta_0 = \dfrac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma} G_0 S(\varphi)\,\mathrm{d}\sigma \\ \zeta_1 = \dfrac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma} G_1 S(\varphi)\,\mathrm{d}\sigma \\ \zeta_2 = \dfrac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma} G_2 S(\varphi)\,\mathrm{d}\sigma - \dfrac{R^2}{2\gamma}\iint\limits_{\sigma} \dfrac{(h-h_P)^2}{l_0^3} x_0\,\mathrm{d}\sigma \\ \vdots \end{cases} \tag{6-3-2}$$

式中，R 为平均椭球体的平均半径；$\mathrm{d}\sigma$ 为单位球面面元；G_0 为地面混合重力异常；h 和 h_P 分别为边界面上流动点和计算点的正常高；l_0 为它们之间的距离；$x_n = \dfrac{1}{2\pi}G_n + \dfrac{3}{16\pi^2}\iint\limits_{\sigma} G_n S(\varphi)\,\mathrm{d}\sigma$；$\zeta_0$，$\zeta_1$，$\zeta_2$ 分别为高程异常的零阶项、一阶项和二阶项；G_1 和 G_2 分别为 Molodensky 一阶和二阶项：

$$\begin{cases} G_0 = \Delta g \\ G_1 = R^2 \iint_\sigma \dfrac{(h - h_P)}{l_0^3} x_0 \, d\sigma \\ G_2 = R^2 \iint_\sigma \dfrac{(h - h_P)}{l_0^3} x_1 \, d\sigma - \dfrac{3R}{4} \iint_\sigma \dfrac{(h - h_P)^2}{l_0^3} x_0 \, d\sigma + 2\pi x_0 \tan^2 \beta \\ \vdots \end{cases} \tag{6-3-3}$$

式中，β 是似地球表面的坡度角。

6.3.2 山东省及邻近区域高程异常一阶项解析

将 Molodensky 一阶项 G_1 分解为两部分：

$$G_1 = G_{11} + G_{12} \tag{6-3-4}$$

$$G_{11} = -h \frac{\partial \Delta g}{\partial h} - \frac{3h}{2R} \Delta g \tag{6-3-5}$$

式中，$\dfrac{\partial \Delta g}{\partial h}$ 为空间重力异常梯度；式(6-3-5)右边第一项相当于将重力异常从地面归化到似大地水准面的空间改正；$\dfrac{3h}{2R}$ 是微小量，可略去。空间异常梯度可按下式计算：

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial h} = \frac{R^2}{2\pi} \iint_\sigma \frac{\Delta g - \Delta g_P}{l_0^3} d\sigma - \frac{2}{R} \Delta g \tag{6-3-6}$$

本节不专门讨论 G_{12}，而直接讨论 ζ_{12}，将高程异常的一阶项对应地分解为两部分：

$$\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12} \tag{6-3-7}$$

其中

$$\zeta_{11} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma G_{11} S(\varphi) d\sigma = -\frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma h \cdot \frac{\partial \Delta g}{\partial h} S(\varphi) d\sigma$$

$$\zeta_{12} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma G_{12} S(\varphi) d\sigma = -\frac{\Delta g}{\gamma} h - \frac{3h\zeta_0}{2R} = \frac{\partial \zeta}{\partial h} h - \frac{3h\zeta_0}{2R}$$



$$= \frac{\partial \zeta}{\partial h}h - \frac{3h\zeta_0}{2R} = \zeta_{120} + \zeta_{121}$$

在研究区域内，高程最大为 2000 m 左右（山东省区域内最高为 1500 m 左右），Δg 的绝对值小于 100 mGal，高程异常 ζ 的绝对值一般小于 20 m，取 $h = 2000$ m，$\Delta g = 100$ mGal，$\zeta = 20$ m，$\gamma = 10\ \mathrm{m/s^2}$，则：

$$\zeta_{120} = -\frac{\Delta g}{\gamma}h = -\frac{2000 \times 100 \times 10 - 5}{10} = -0.20\ (\mathrm{m}) \tag{6-3-8}$$

$$\zeta_{121} = \frac{3h\zeta_0}{2R} = -\frac{3 \times 2000 \times 20}{2 \times 6371000} = -0.0090\ (\mathrm{m}) \tag{6-3-9}$$

ζ_{120} 项在平原区域为毫米级，甚至可以忽略，但在山区可以达到数十厘米，对于厘米级似大地水准面确定不可忽略。ζ_{121} 被认为是 h/R 级小量，在研究区域内最大值小于 1.0 cm，可以忽略不计。忽略 ζ_{121} 的影响，ζ_{12} 可以认为是从似大地水准面到地面的高程异常改正。

6.3.3　山东省及邻近区域高程异常二阶项解析

根据式(6-3-3)可以将 Molodensky 二阶项 G_2 写为：

$$G_2 = \frac{R^2}{2\pi}\iint_\sigma \left(G_1 + \frac{3\gamma\zeta_1}{2R}\right)\frac{(h - h_P)}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma - \frac{3R}{8\pi}\iint_\sigma \left(G_0 + \frac{3\gamma\zeta_0}{2R}\right)\frac{(h - h_P)^2}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma + \left(G_0 + \frac{3\gamma\zeta_0}{2R}\right)\tan^2\beta \tag{6-3-10}$$

将 Molodensky 二阶项 G_2 和高程异常二阶项 ζ_2 分解为四部分进行分析：

$$G_2 = G_{21} + G_{22} + G_{23} + G_{24} \tag{6-3-11}$$

$$\zeta_2 = \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23} + \zeta_{24} \tag{6-3-12}$$

其中

$$G_{21} = -h\frac{\partial G_1}{\partial h} - \frac{3h}{2R}G_1$$

$$\zeta_{21} = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} G_2 S(\varphi)\mathrm{d}\sigma$$

式中，$\frac{\partial G_1}{\partial h}$ 为 G_1 的梯度；式(6-3-11)右边第一项相当于将重力异常梯度从地面归化到似大地水准面的空间改正；$\frac{3h}{2R}$ 是可略去的微小量。忽略 h/R 量级小量，G_{21} 的为重力异常的二阶梯度，在其对高程异常的影响 ζ_{21} 可以忽略起伏不大的区域是个小量，G_1 梯度可按下式计算：

$$\frac{\partial G_1}{\partial h} = \frac{R^2}{2\pi}\iint_{\sigma}\frac{G_1 - G_{1P}}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma - \frac{2}{R}G_1 \tag{6-3-13}$$

取 $\Delta g = 50$ mGal，高程异常 $\zeta = 20$ m，$\gamma = 10$ m/s²，则：

$$G_{24} = \left(G_0 + \frac{3\gamma\zeta_0}{2R}\right)\tan^2\beta \approx 55\tan^2\beta\,(\mathrm{mGal}) \tag{6-3-14}$$

式中，β 为计算点上似地球面的坡度角。可以看出，G_{24} 是与地形起伏强相关的量，在平原地区可以不考虑，在中等山区 $\beta < 10°$ 时，一般为几个毫伽。由于本节所研究区域大部是平原和起伏和缓的波状丘陵区，地面坡度较小，G_{24} 可不考虑。

$$G_{23} = -\frac{3R}{8\pi}\iint_{\sigma}\left(G_0 + \frac{3\gamma\zeta_0}{2R}\right)\frac{(h - h_P)^2}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma \tag{6-3-15}$$

G_{23} 与 G_1 比较是 h/R 级小量，即使在起伏急剧的山区，也难以达到毫伽量级，在厘米级似大地水准面的确定中，完全可以忽略 G_{23} 对高程异常的影响。

根据式(6-3-2)将高程异常二阶项 ζ_2 写为：

$$\zeta_2 = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} G_2 S(\varphi)\mathrm{d}\sigma - \frac{R^2}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma}\left(G_0 + \frac{3\gamma\zeta_0}{2R}\right)\frac{(h - h_P)^2}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma \tag{6-3-16}$$

对式(6-3-16)右边第二项进行估计，令：

$$\zeta'_{23} = -\frac{R^2}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma}\left(G_0 + \frac{3\gamma\zeta_0}{2R}\right)\frac{(h - h_P)^2}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma \tag{6-3-17}$$



ζ'_{23} 也是与地形起伏强相关的量，国内学者章传银对该量进行了估计，结果为在平原、丘陵和起伏不大的高原区，ζ'_{23} 约为零，一般山区小于 1.0 cm，急剧起伏的高大山区为厘米级。

$$\zeta_{21} = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} G_{21} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma = -\frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} h \cdot \frac{\partial G_1}{\partial h} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{6-3-18}$$

$$\zeta_{22} = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} G_{22} S(\varphi)\mathrm{d}\sigma = -\frac{G_1}{\gamma}h - \frac{3h\zeta_1}{2R} = \zeta_{220} + \zeta_{221} \tag{6-3-19}$$

ζ_{21} 是与 G_1 梯度有关的量，不考虑 h/R 级小量，ζ_{21} 与重力异常二阶梯度有关，是小量，ζ_{220} 和 ζ_{221} 在取 $h = 1000$ m，$G_1 = 5$ mGal，$\gamma = 10$ m/s^2 情况下也为小于 1.0 cm 的量。

从以上分析来看，ζ_1 是与地面高度有关的量，在研究区域可达到数十厘米量级，在利用 Molodensky 级数进行似大地水准面确定的过程中，应顾及一阶项的影响；Molodensky 级数二阶项主要影响高程异常的高频成分，量级随地形粗糙度的增加而增加，表现为地形粗糙的地方，高频地形影响更粗糙，地形平滑的地方，地形影响更平滑；Molodensky 级数二阶项的影响与高度没有明显关系，对于平坦的高原区域，地形影响的高频分量较小。由于本节所研究区域大部分为平原和起伏和缓的波状丘陵区域，Molodensky 级数二阶项的影响总体上小于 1.0 cm，在本节的研究中，只顾及 Molodensky 级数的一阶项影响。

6.3.4　Faye 异常计算高程异常严密公式

利用 Faye 异常计算高程异常的概念最早是由 Pellinen(1962)提出的后，由 Heiskanen 和 Moritz(1967)给出公式推导。由 6.3.2 的分析，Molodensky 级数一阶项 G_1 可分解为两项，相应的高程异常一阶项 ζ_1 也分解为两项，其中 G_{11} 相当于地面空间重力异常归化到似大地水准面的空间改正，ζ_{12} 相当于似大地水准面上计算的高程异常恢复到地面的改正。依此引出解析延拓的思想，将延拓至似大地水准面引申到延拓至地面点水准面，则 $\zeta_{12} = 0$，由此计算的高程异

常就为地面高程异常。以 S 表示 Stokes 算子,L 表示梯度算子,即:

$$S(f)=\frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} fS(\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{6-3-20}$$

$$L(f)=\frac{R^2}{2\pi}\iint_{\sigma}\frac{f-f_P}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{R}f \tag{6-3-21}$$

设 $f(\varphi,\lambda)$ 为定义在球面上的连续函数,以下关系式成立:

$$SL(f)=-\frac{1}{\gamma}I(f-f_0-f_1) \tag{6-3-22}$$

式中,I 为单位算子。

当 f 不包含零阶和一阶球谐项时,式(6-3-22)简化为:

$$SL(f)=-\frac{1}{\gamma}I(f) \tag{6-3-23}$$

设 A 为高程异常计算点,P 为流动点,以 g_1 表示延拓至点水准面的相应的空间异常改正,则:

$$g_1=(h_A-h_P)L(\Delta g) \tag{6-3-24}$$

式中,h_A 为高程异常计算点高程(常数);h_P 为流动点高程(函数)。

由于重力异常不包含零阶和一阶球谐项,对 g_1 应用 Stokes 算子得:

$$S(g_1)=h_ASL(\Delta g)-S(h_PL(\Delta g))=-\frac{h_A}{\gamma}\Delta g_A-S(h_PL(\Delta g)) \tag{6-3-25}$$

对上式右端第二项应用式(6-3-21),并略去 f/R 项,令 $f=\Delta g$,则

$$h_PL(\Delta g)=h_P\frac{R^2}{2\pi}\iint_{\sigma}\frac{\Delta g-\Delta g_P}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma \tag{6-3-26}$$

空间重力异常 Δg 可表示为:

$$\Delta g=\Delta g_B+2\pi G\rho\cdot h \tag{6-3-27}$$

式中,Δg_B 为 Bouguer 重力异常。Δg_B 变化缓慢,可看成局部区域的常数,则:

$$\Delta g-\Delta g_P=2\pi G\rho\cdot(h-h_P) \tag{6-3-28}$$



将式(6-3-28)代入(6-3-26)得：

$$h_P L(\Delta g) = 2\pi G\rho \frac{R^2}{2\pi}\iint_\sigma \frac{h_P(h - h_P)}{l_0^3} d\sigma \quad (6\text{-}3\text{-}29)$$

将 $h_P(h - h_P)$ 改写成以下形式：

$$h_P(h - h_P) = -\frac{1}{2}(h - h_P)^2 + \frac{1}{2}(h^2 - h_P^2) \quad (6\text{-}3\text{-}30)$$

将式(6-3-30)代入(6-3-29)得：

$$\begin{aligned} h_P L(\Delta g) &= -\frac{1}{2}G\rho R^2 \iint_\sigma \frac{(h - h_P)^2}{l_0^3} d\sigma + G\rho R^2 \iint_\sigma \frac{h^2 - h_P^2}{l_0^3} d\sigma \\ &= \Delta g_{TC} + \pi G\rho L(h^2) \end{aligned} \quad (6\text{-}3\text{-}31)$$

对 $h_P L(\Delta g)$ 作 Stokes 算子，得：

$$S(h_P L(\Delta g)) = -S(\Delta g_{TC}) + \pi G\rho SL(h^2) \quad (6\text{-}3\text{-}32)$$

由于全球地形高平方 h^2 的球谐展开含有零阶和一阶项，满足式(6-3-23)，所以：

$$S(h_P L(\Delta g)) = -S(\Delta g_{TC}) + \pi G\rho\gamma^{-1}[h_A^2 - (h_A^2)_0 - (h_A^2)_1] \quad (6\text{-}3\text{-}33)$$

将式(6-3-33)代入(6-3-25)得

$$S(g_1) = S(\Delta g_{TC}) - \frac{h_A \Delta g_A}{\gamma} - \frac{\pi G\rho h_A^2}{\gamma} + \frac{\pi G\rho}{\gamma}\delta h_A^2 \quad (6\text{-}3\text{-}34)$$

式中，$\delta h_A^2 = (h_A^2)_0 + (h_A^2)_1$。

Wang 利用全球数字高程模型 ETOPO5 的数据，求解展开至 180 阶的球谐系数，全球地形高平方 h^2 的球谐展零阶和一阶项之和的表达式为：

$$\delta h_A^2 = 0.453 - 0.018\sin\varphi + 0.087\cos\varphi\cos\lambda + 0.204\cos\varphi\sin\lambda \quad (6\text{-}3\text{-}35)$$

式中，δh_A^2 的单位为千米；φ 和 λ 分别为球面纬度和球面经度。顾及 Molodensky 级数一阶项的高程异常计算公式为：

$$\zeta = S(\Delta g + \Delta g_{TC}) - \frac{h_A \Delta g_A}{\gamma} + \frac{\pi G\rho h_A^2}{\gamma} - \frac{\pi G\rho}{\gamma}\delta h_A^2 \quad (6\text{-}3\text{-}36)$$

由式(6-3-36)计算的山东省及邻近区域似大地水准面模型，积

分半径取 50′，结果如图 6-5 所示。

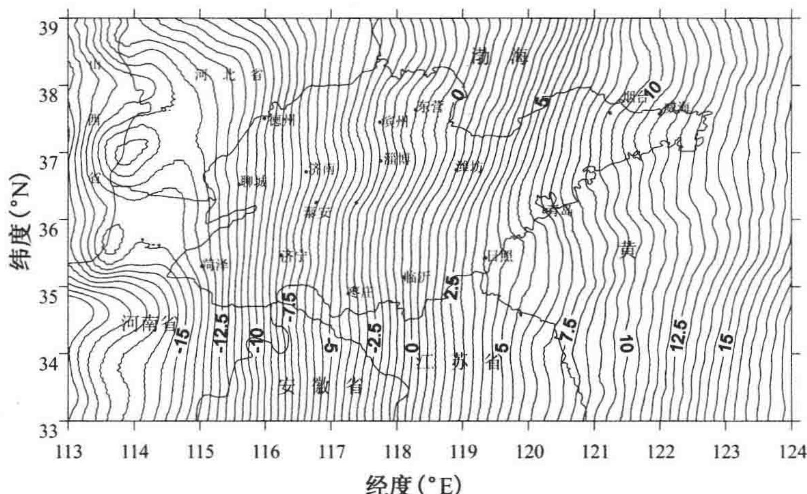


图 6-5　山东省及邻近区域重力似大地水准面等值线图

6.4　重力(似)大地水准面的误差分析

许多潜在的误差源可以影响重力(似)大地水准面最终结果的精度。在利用移去-恢复方法进行局部(似)大地水准面确定中，地球重力位模型的中、长波长误差，空间重力异常格网数据误差和数字高程模型(DEM)分辨率是影响重力(似)大地水准面精度的主要因素。随着专用于重力探测计划的 CHAMP、GRACE 和 GOCE 重力卫星的实施，在未来几年有望得到中、长波达到厘米级精度全球重力场模型，为区域(似)大地水准面精化提供高效数据源。本节对地球重力位模型的中、长波长误差的影响不予讨论，而集中分析格网重力异常误差和数字高程模型(DEM)分辨率的影响。

影响格网空间异常数据误差的主要因素有地面重力数据观测误差、格网化过程引入的误差、区域高程基准与全球高程基准不一致引



起的误差等。其中，重力观测误差和格网化过程误差主要表现为偶然误差，而高程基准不一致引起的误差主要表现为系统误差。

6.4.1　格网重力异常偶然误差的影响

Stokes 公式可表达为：

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} \Delta g S(\varphi) \mathrm{d}\sigma \tag{6-4-1}$$

式中，Δg 重力异常；$S(\varphi)$ 为 Stokes 函数；γ 为地球平均正常重力；R 为地球平均半径。

将式(6-4-1)离散化，得：

$$N = k\sum_{i=1}^{m\times n} \Delta g_i S(\varphi_i) \mathrm{d}\sigma_i \tag{6-4-2}$$

式中，$m \times n$ 为积分区间格网总数；$k = \dfrac{R}{4\pi\gamma}$。

将 Δg_i 看作具有相同精度的独立变量，按误差传播定律，有：

$$\sigma_N = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m\times n} (\mathrm{d}\sigma_i)^2 S^2(\varphi_i)} \cdot \sigma_{\Delta g} \tag{6-4-3}$$

式中，σ_N 为大地水准面高的中误差；$\sigma_{\Delta g}$ 为空间重力异常中误差。

从式(6-4-3)可以看出，在格网分辨率不变的情况下，$k\sqrt{\sum_{i=1}^{m\times n} (\mathrm{d}\sigma_i)^2 S^2(\varphi_i)}$ 在小区域内为常数，σ_N 与 $\sigma_{\Delta g}$ 为正比关系，空间重力异常偶然误差对大地水准面的影响也表现为偶然误差。如果格网分辨率提高一倍，空间重力异常精度保持不变的情况下，格网大地水准面的精度将提高一倍。

6.4.2　格网重力异常系统误差的影响

假设空间重力异常存在系统误差 dg（为固定值），则空间异常系统误差对大地水准面的影响为：

$$\mathrm{d}N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} \mathrm{d}g S(\varphi) \mathrm{d}\sigma \tag{6-4-4}$$

当积分半径一定时,空间异常系统误差对格网大地水准面的影响几乎是相同的,所以地面重力数据的系统偏差对大地水准面的影响也表现系统偏差;当地面重力数据的系统偏差值一定时,大地水准面高的系统偏差与积分半径成正比。

由于我国验潮站海域的海面地形的影响,我国高程基准与全球高程基准差别约为 25～30 cm,导致空间异常系统偏差约为 90 μGal,积分半径选择 2°时,对大地水准面的影响约为 2 cm。积分半径越小,空间异常系统偏差的影响越小。

由于顾及 Molodensky 级数一阶项的高程异常也可由 Stokes 公式来计算,以上分析对似大地水准面的精度分析同样成立,对于重力(似)大地水准面系统性误差的影响,可以通过与 GPS/水准(似)大地水准面的拟合来部分地消除。

6.4.3 数字高程模型(DEM)分辨率的影响

数字高程模型(DEM)的误差。在进行重力归化和格网化插值、计算局部地形改正(大地水准面确定)和计算 Molodensky 级数一阶项 G_1(似大地水准面确定)中将引起模型误差。DEM 引起大地水准面高 N 和高程异常 ζ 的误差没有具体的计算公式。低分辨率的 DEM 会损失部分高频信息,对于山区(似)大地水准面的计算应尽可能使用较高分辨率的 DEM。用于计算地形改正(或 G_1 项)的 DEM 的分辨率应至少是要计算(似)大地水准面分辨率的 2～5 倍。

6.5 两类似大地水准面的拟合新方法研究

全球重力位模型和局部地面重力数据长波误差的不一致,不同数据源高程基准和椭球基准的差别,这些因素都将导致由重力数据确定的似大地水准面和 GPS/水准点为控制的似大地水准面有较大的系统偏差和不符值,由于误差成分比较复杂,难以用简单的坐标变换参数来模拟。根据国内外两类似大地水准面拟合的经验,一般采



用曲面多项式作为拟合函数将重力似大地水准面拟合到 GPS/水准似大地水准面上，为限制拟合误差，通常采取分区拟合方法。由于两类似大地水准面差别的不规则性，分区多项式拟合不仅增大了计算工作量，也引入了模型误差。

利用 BP 神经网络进行两类似大地水准面拟合，将新方法和传统的多项式曲面拟合方法进行比较，并分别分析了两个方法的优点和缺点。在山东省区域内利用 Bayesian 正则化 BP 神经网络将重力似大地水准面拟合到 106 个 GPS/水准点为控制的 GPS/水准似大地水准面，作为山东省区域似大地水准面的最后结果，并利用收集到的山东省区域内两个 C 级 GPS 控制网和相应的三等水准成果进行了内、外符合精度的统计。由于两个 C 级 GPS/水准网一个在平原区域，一个在山区和丘陵区，基本概括了山东省区域内的地形、地貌情况，内、外符合精度可以代表山东省区域内似大地水准面的整体精度。

6.5.1　人工神经网络的发展

人工神经网络是一门新兴交叉学科，是生物神经系统高度简化后的近似。神经网络领域的研究工作开始于 19 世纪末 20 世纪初，源于物理学、心理学和神经生理学的跨学科研究。20 世纪 40 年代，美国心理学家 Warren McCulloch 和数学家 Walter Pitts 从原理上证明了人工神经网络可以计算任何算术和逻辑函数，通常认为他们的工作是神经网络领域研究工作的开始。20 世纪 70 年代，由于缺乏新思想和用于实验的高性能计算机，神经网络研究相对处于低潮时期，但仍有许多科学家在该领域开展了许多重要的工作。进入 80 年代，随着个人计算机和工作站计算能力的增强和新概念的引入，克服了摆在神经网络研究面前的障碍，人们对神经网络的研究热情空前高涨。目前，神经网络已进入相对平稳发展时期，神经网络理论的应用已经渗透到各个领域，并在智能控制、模式识别、自适应滤波、信号处理和函数逼近等方面取得令人鼓舞的进展。

神经网络在本质上可看作函数逼近器，已有的研究表明，一个第一层具有S形传输函数，第二层具有线性传输函数的网络，只要隐含层中有足够单元可用，就几乎可以以任意精度逼近任何感兴趣的函数。测绘界已有不少学者对神经网络方法在大坝变形监测、沉降分析和GPS高程转换等方面进行了深入研究，提出一些新的观点，推动了神经网络方法在测绘学科的应用。本节主要研究利用神经网络方法进行GPS/水准似大地水准面和重力似大地水准面的拟合，并和传统的曲面拟合方法进行比较。

6.5.2 神经元模型和网络结构

输入向量 P 的每个元素均通过权值矩阵 W 和每个神经元相连，每个神经元有一个偏置值 b_i、一个累加器、一个传输函数 f 和一个输出 a_i，可以并行操作的神经元的集合称为“层”，每层中所有神经元的输出结合在一起，可以得到一个输出向量 a，网络的输出为“输出层”，而其他层叫“隐含层”。图6-6所示为三层神经网络结构图。

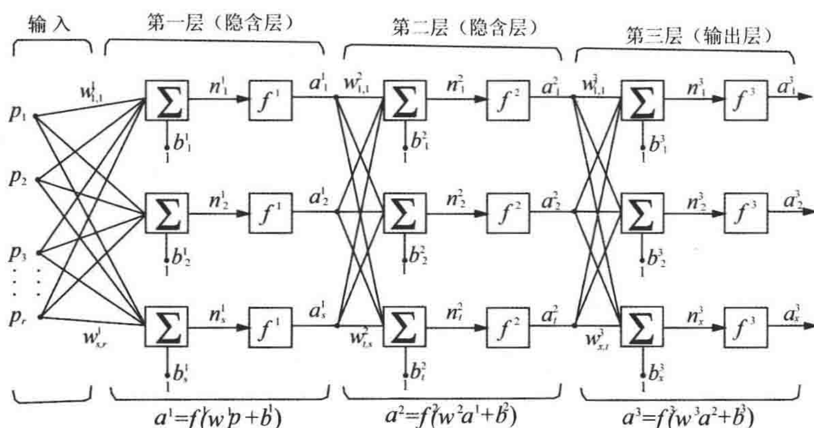


图6-6 三层神经网络结构图



多层网络的功能要比单层网络强大得多，两层网络在隐含层使用S形传输函数，在输出层中使用线性传输函数，经过训练可对大多数函数达到任意精度的逼近，而单层网络则不能做到这一点。大多数的神经网络只有2～3层神经元，网络的输入和输出神经元数目由问题的外部描述定义。但精确预测隐含层中所需的神经元数目仍存在着理论上没有解决的问题。

由大量神经元相互连接组成的人工神经网络显示出人脑的某些基本特征，如分布存储和容错性、并行处理和自适应性。神经元网络是大量神经元的集体行为，并不是各单元行为的简单相加，可以处理环境信息复杂、背景不清楚和推理规则不明确的问题。

6.5.3 两类似大地水准面拟合的神经网络模型和MATLAB仿真程序设计

计算机的软件仿真是研究神经网络常用的方法，MATLAB提供了丰富的神经网络工具箱，几乎包括了现有神经网络模型的最新成果，借助它们可直观、方便地进行神经网络的应用设计、分析、计算等。基于神经网络模型的两类似大地水准面拟合的具体计算过程为：

(1)根据GPS/水准的大地坐标利用重力似大地水准面格网数值模型内插重力似大地水准面模型高程异常 ζ_1，从GPS/水准点实测高程异常 ζ_2 中减去 ζ_1 组成不符值序列 $\Delta\zeta$。由于高程异常与点位的平面位置密切相关，而与点位的高程位置关系不大，将输入层元素取为点位的大地坐标 (B,L)，输出层元素取为高程异常差 $\Delta\zeta$，将所有控制点的信息构成学习集样本：$(B_i,L_i;\Delta\zeta_i)(i=1,2,\cdots,n)$。

(2)构造神经网络模型，利用给定学习集样本对网络进行训练，在性能指数最小的状态下获得网络 α 和 β 值以及网络最佳权值。

(3)用训练好的神经网络求重力似大地水准面规则格网上的高程异常改正数 $\Delta\zeta$，重力似大地水准面格网上的高程异常加高程异常改正数 $\Delta\zeta$ 完成将重力似大地水准面拟合到GPS/水准似大地水

准面上。

根据两类似大地水准面拟合的数据特点,构造了五层神经网络模型,分别为输入转换层、输入层、隐含层、输出层和输出转换层。网络只设一个隐含层,隐含层采用标准 Sigmoid 激活函数:

$$f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \tag{6-5-1}$$

输出层中采用线性函数,标准 Sigmoid 激活函数的标准输入、输出数据限定范围为[0,1],输入(出)转换层主要是将输入(出)数据转换为[0,1]之间的值,为避开网络的饱和区,可将数据范围设定为:[0.1,0.9]或[0.2,0.8]。

在 MATLAB 神经网络工具箱中,按照 Bayesian 正则化法对 BP 神经网络进行训练的函数是 trainbr。

6.5.4 重力似大地水准面和 GPS/水准似大地水准面拟合

(1)利用山东省区域内 106 个 GPS/水准点的大地坐标在重力似大地水准面格网数值模型中内插重力似大地水准面模型高程异常 ζ_1,从 GPS/水准点实测高程异常 ζ_2 中减去 ζ_1 组成不符值序列 $\Delta\zeta$,由于高程异常与点位的平面位置密切相关,而与点位的高程位置关系不大,将输入层元素取为点位的大地坐标 (B,L),输出层元素取为高程异常差 $\Delta\zeta$,将 106 个高程异常控制点的信息构成学习集样本:$(B_i,L_i;\Delta\zeta_i)(i=1,2,\cdots,106)$。

(2)由于学习集有 106 点数据,根据网络应该具有比训练集中的数据点少的参数的原则,构造 2—20—1(2 个输入、20 个神经元、1 个输出)神经网络模型,网络共有 81 个可调节参数(60 个权值和 21 个偏置值),初始权值随机赋值为接近于零的非零值,可以在不离开性能曲面平坦区域的同时避开可能的鞍点。由于初始权值是随机产生的,不同的初始权值会对最终结果产生影响,但不同初始权值的结果差异一般在毫米级或者更少,可以忽略其影响。

(3)对 BP 神经网络进行训练,将学习集的输入信息通过输入层



经隐含层计算每个学习集样本的输出值，根据输出值逐层递归的计算实际输出值与期望输出值之差，据此差调节权值，在误差达到性能指数最小的状态下获得网络 α 和 β 值以及网络最佳权值。

(4)用训练好的神经网络求重力似大地水准面规则格网上的高程异常改正数 $\Delta\zeta$，重力似大地水准面格网上的高程异常加高程异常改正数 $\Delta\zeta$ 完成将重力似大地水准面拟合到 GPS/水准似大地水准面上。

6.5.5　似大地水准面结果的精度统计

由于 106 个 GPS/水准点参与了似大地水准面模型结果的构建，其检验结果作为内符合精度的检验。利用收集到的山东省区域内两个 C 级 GPS 控制网和相应的三等水准成果进行了外符合精度的统计，由于两个 C 级 GPS/水准网一个在平原区域，一个在山区和丘陵区，外符合精度可以代表山东省区域内似大地水准面的整体精度。需要说明的是，两个 C 级 GPS/水准网的按国家第二期的一、二等水准观测成果进行平差计算（观测时间为 1977～1988 年），为进行华东区似大地水准面精化，2005～2006 年对区域内一、二等水准路线进行了标石补埋和复测，由于地面沉降等原因，复测结果与原结果有平均约 70～80 厘米左右的系统差，在外符合精度的统计中，对系统差进行了调整。山东省区域内似大地水准面模型结果的内、外符合精度的统计结果列于表 6-1。

表 6-1　　似大地水准面模型结果的内、外符合精度统计　　单位：m

比较项目	检核点区域	检核点个数	最大值	最小值	平均值	标准差
内符合精度	全省	106	0.123	−0.166	−0.001	0.045
外符合精度	平原	81	0.250	−0.180	0.000	0.088
	山区、丘陵	49	0.241	−0.255	0.000	0.096

从表中的精度统计数据来看，在山区和丘陵地区精度低于平原地区的精度，这与山区和丘陵地区高程异常受地形起伏影响，高频部分变化复杂有关，也与山东省 T 市 C 级 GPS 控制网每点观测时间短，大地高精度低有关。似大地水准面模型结果内、外符合精度均优于 10.0 厘米，表明似大地水准面模型精度达到厘米级，结合 GPS 测量的高精度大地高计算的正常高在该区域可以达到四等及以下几何水准的精度要求，可以满足一般工程测量中 1∶2000 以下中、小比例尺地形测图和相应比例尺航测成图像控点对高程的要求。

第7章 地球重力场模型和区域(似)大地水准面的工程应用研究

随着GPS技术在测绘领域的广泛应用,GPS测量在平面控制方面发挥了巨大的作用。工程测量中的高程控制仍沿用传统的水准测量的方法,实践表明,工程测量中GPS相对定位技术能够在10^{-6}～10^{-8}的量级精度上获得所测点位的三维相对坐标,但其获得的高程信息是相对于WGS-84椭球的大地高,而我国的法定高程系统是以似大地水准面为基准的正常高。将GPS大地高转换为正常高,是GPS应用领域的一个研究热点。本章主要研究利用地球重力场模型提高山区GPS高程转换的精度、地球重力场模型和GPS/水准数据联合确定工程区域似大地水准面、利用二次平差法建立GPS平面和高程一体工程控制网和GPS平面和高程一体工程控制网在水利工程中的应用等内容。本章研究的目的是在一般工程测量中,利用GPS观测信息得到GPS观测点的正常高,取代传统的水准测量方法,真正实现GPS技术在几何和物理意义上的三维定位功能。

7.1 地球重力场模型提高山区GPS高程转换精度

近几年来,随着专用于重力计划的CHAMP和GRACE卫星的发射,(似)大地水准面中、长波长部分的精度提高到厘米数量级。研究表明,(似)大地水准面相对于椭球面起伏的频谱结构是地球深部

及地幔密度异常引起的长波占优(相对幅度大于90%),地形和地壳的扰动质量产生的中、短波分量相对较小。在高程异常比较平缓的平原地区,利用分布均匀的GPS/水准点,通过拟合方法可以得到满足四等及以下水准精度要求的正常高,但起伏较大的丘陵和山区,由于似大地水准面变化较为复杂,拟合方法得到的正常高精度较低。有效地利用地球重力场模型提高GPS测定的大地高向正常高转换的精度是本节研究的主要目的。

7.1.1 原理与方法

GPS测量获得的高程是相对于椭球面的大地高 H,我国法定高程基准面是以似大地水准面为基准的正常高 h,两者之差为高程异常 ζ,三者之间关系可表示为

$$h=H-\zeta \tag{7-1-1}$$

提高待测点高程异常 ζ 的精度是提高GPS大地高向正常高转换精度的关键,地面点的高程异常可表示为:

$$\zeta=\zeta_M+\Delta\zeta \tag{7-1-2}$$

式中,ζ_M 是由地球重力场模型计算的模型高程异常,对应高程异常的中、长波部分;$\Delta\zeta$ 是残差高程异常。

在高程异常起伏较大的地区,直接根据离散点的高程异常对未知点的高程异常进行拟合内插,会出现较大偏差。如果首先由GPS/水准点的实测高程异常 ζ 减去GPS/水准点上的 ζ_M,获得平滑度较高的残差高程异常场(这个过程称为"移去");根据离散的GPS/水准点残差高程异常由曲面拟合法或局部拟合法计算待定高程点的残差高程异常 $\Delta\zeta$,然后加上待定高程点的 ζ_M,得到待定高程点的高程异常 ζ(这个过程称为"恢复")。待定高程点的程异常 ζ 与GPS观测得到的大地高 H 通过式(7-1-1)即可得到以似大地水准面为基准面的正常高。移去恢复法的实质是利用平滑度较高的残差高程异常场进行拟合内插,来提高拟合内插的精度。



7.1.2 曲面拟合法实例分析

利用山东省 T 市 C 级 GPS 控制网数据进行计算分析，山东省 T 市大部分位于鲁中山区，最高海拔 1500 多米，相对高度 1400 米，区域内大部分为山区地形。T 市 C 级 GPS 控制网共有 51 个 GPS/水准点可以利用，具体情况可参看 5.4.3 节。该区 C 级 GPS/水准点分布如图 7-1 所示。选取 C 级 GPS 网中均匀分布的 TA003、TA009、TA012、TA023、TA027、TA029、TA038、TA042、TA057、TA058、TA069、TA084、TA092、TA104、TA110、TA123 和 TA126 共 17 点作为 GPS/水准控制点，将这些点上的高程异常 ζ（或减去重力场模型高程异常的高程异常残差 $\Delta\zeta$）视为“观测值”，利用三次曲面拟合法计算其余 GPS/水准点的高程异常（或残差）。假设区域内高程异常 ζ（或高程异常残差 $\Delta\zeta$）与大地坐标之间存在如下数学模型：

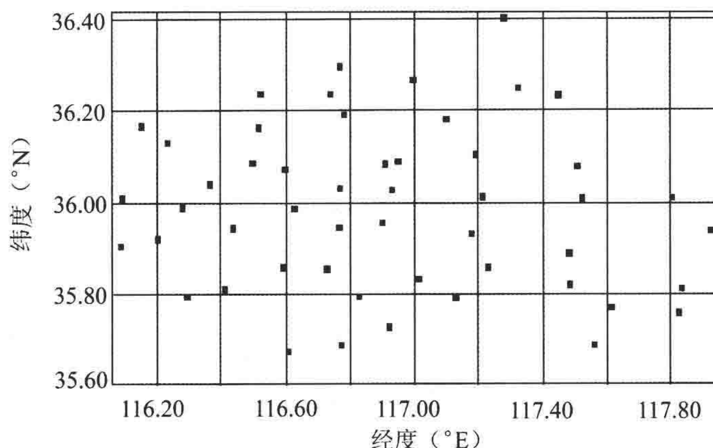


图 7-1 T 市 C 级 GPS/水准点分布图

$$\Delta\zeta_i = a_0 + a_1 B_i + a_2 L_i + a_3 B_i^2 + \cdots + a_9 L_i^3 \ , i = 1,2,\cdots,17 \tag{7-1-3}$$

式中，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_9$ 为多项式系数。

误差方程式形式为：

$$v_i = a_0 + a_1 B_i + a_2 L_i + a_3 B_i^2 + \cdots + a_9 L_i^3 - \Delta\zeta_i \ , i = 1,2,\cdots,17 \tag{7-1-4}$$

写为矩阵形式为：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{XA} - \boldsymbol{\Delta\zeta} \tag{7-1-5}$$

式中：$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{17} \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_9 \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & B_1 & L_1 & \cdots & L_1^3 \\ 1 & B_2 & L_2 & \cdots & L_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & B_{17} & L_{17} & \cdots & L_{17}^3 \end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{\Delta\zeta} = \begin{pmatrix} \Delta\zeta_1 \\ \Delta\zeta_2 \\ \vdots \\ \Delta\zeta_{17} \end{pmatrix}$。

根据最小二乘原理 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \min$ 求解拟合方程系数，可得：

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PX})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P\zeta} \tag{7-1-6}$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 为高程异常(或残差)的权阵，与 GPS 和水准观测精度有关，如果所有 GPS/水准点均为等精度观测，则 $\boldsymbol{P}$ 为单位阵。利用计算得到的三次曲面拟合系数可计算区域内任意一点的高程异常(或残差)。

利用三次曲面拟合法计算其余 GPS/水准点的高程异常，分别将直接拟合高程异常和顾及 EGM96 和 EIGEN-CG03C 模型的拟合高程异常与 GPS 观测大地高一起计算正常高，并和实测高程进行比较(TA035 和 TA079 三点计算高程与实测高程差别较大，比较结果中未进行统计)，比较的统计结果列于表 7-1。



表 7-1　　拟合高程与水准实测高程差统计结果　　单位：m

	比较点个数	最大值	最小值	平均	均方差
曲面拟合	32	0.163	－0.248	－0.026	0.1066
顾及 EGM96 模型的拟合	32	0.136	－0.223	－0.019	0.0845
顾及 CG03C 模型的拟合	32	0.135	－0.228	－0.019	0.0832

从表 7-1 中的比较数据来看，在丘陵和山区，由于似大地水准面起伏较大，移去重力场模型高程异常，得到平滑度较高的残差高程异常场，进行曲面拟合，然后恢复模型高程异常。精度比直接拟合高程异常有明显提高，EGM96 和 CG03CB 模型均将 GPS 高程转换的精度提高 15%～20%。

7.1.3　局部拟合法实例分析

利用分布均匀的 GPS/水准点，将这些点上的高程异常（或高程异常残差）视为"观测值"，由于对区域边缘点的拟合内插有较大误差，所以本节研究选取内区的 38 个 GPS/水准点作为高程待定点进行高程异常内插计算，在 38 个点中任选一点，按 Shepard 插值模型利用距离小于 20 km 内的点进行局部拟合内插，其具体表达式为：

$$\Delta\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta\zeta_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{7-1-7}$$

其中权 p 取为拟合点至 GPS/水准点的距离 d 的倒数。由拟合高程异常（或高程异常残差）值计算该点正常高，并比较计算高程与水准测量值之差，按此方式依次抽取第 2 点、第 3 点、……直到最后一点。局部拟合法得到的每个 GPS/水准点上的正常高与水准实测值高程差结果如图 7-2 所示。

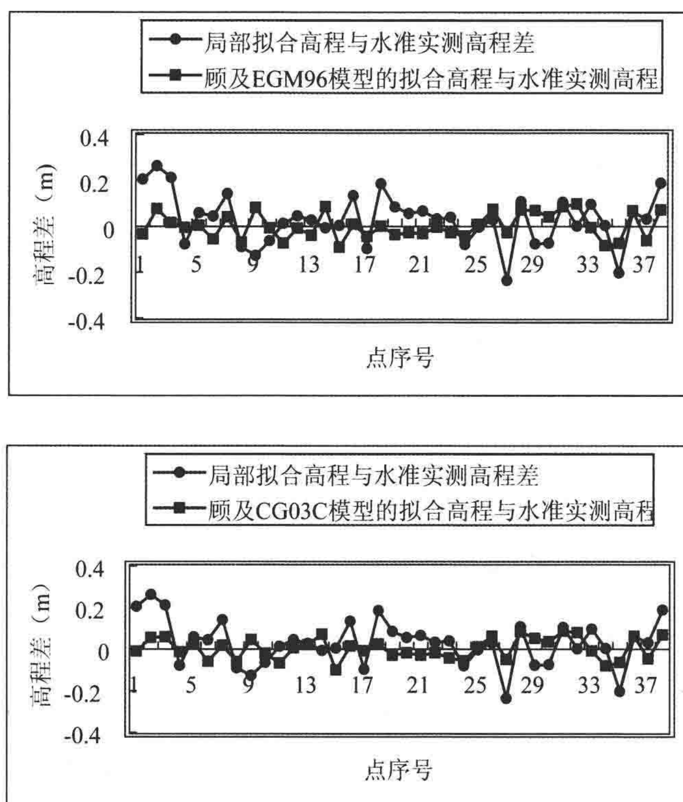


图 7-2 拟合高程与水准实测高程差结果

局部拟合和顾及重力场模型的局部拟合得到的正常高与水准实测值之差统计结果列于表 7-2。

表 7-2　拟合高程与水准实测高程差统计结果　单位：m

	最大值	最小值	平均	均方差
局部拟合	0.2626	−0.2360	0.0289	0.1107
顾及 EGM96 模型的局部拟合	0.0980	−0.0910	−0.0016	0.0557
顾及 CG03C 模型的局部拟合	0.0866	−0.0990	0.0029	0.0516



从图 7-2 和表 7-2 中的比较数据来看，在山区，由于似大地水准面起伏较大，移去重力场模型高程异常，得到平滑度较高的残差高程异常场，进行局部拟合，然后恢复模型高程异常。精度明显比直接拟合高程异常有大的提高，EGM96 和 CG03C 模型均将 GPS 高程转换的精度提高 50%左右。由于 CG03C 模型使用了更多的卫星重力探测数据，数据覆盖更加均匀，所以利用 CG03C 模型的计算结果略优。

7.1.4　结论

在地形复杂的山区，利用高精度重力场模型，通过移去高程异常长波部分，拟合平滑度较高的高程异常残差，可大幅度提高 GPS 高程转换的精度。对于几何水准难以施测的山区利用 GPS 观测信息确定高精度海拔高程，真正实现 GPS 在物理及几何意义上的三维定位功能有重要意义。

7.2　地球重力场模型和 GPS/水准数据确定工程区域似大地水准面

确定(似)大地水准面就是确定(似)大地水准面相对于参考椭球面的起伏。目前，确定区域似大地水准面的方法主要有几何法、重力法和组合法(几何和重力法组合)等方法。利用高阶地球重力场位模型和区域的 GPS/水准数据计算得到区域(似)大地水准面模型属于几何法。在某些工程区域，由于需要进行多次高程测量，可通过布设一定数量的 GPS/水准点，通过几何法确定该工程区域似大地水准面模型，并在项目实施过程中利用 GPS 观测信息进行高程测量。本节主要利用 IGG05B 模型和山东省 L 市 C 级 GPS 控制网和三等水准数据以移去-恢复技术获得了山东省 L 市区域(似)大地水准面模型，通过内、外精度的检验，(似)大地水准面模型的精度为厘米级。该区域 GPS 测定的高程可以达到四等及以下几何水准的要求。

7.2.1 数据资料与参考重力场模型

选用IGG05B模型作为参考重力场模型,用于计算高程异常和重力异常的中、长波部分。山东省L市区域内C级GPS网点81点作为研究数据,点间平均距离约为10 km(数据具体情况可参看5.4节)。该区C级GPS/水准点分布如图7-3所示。

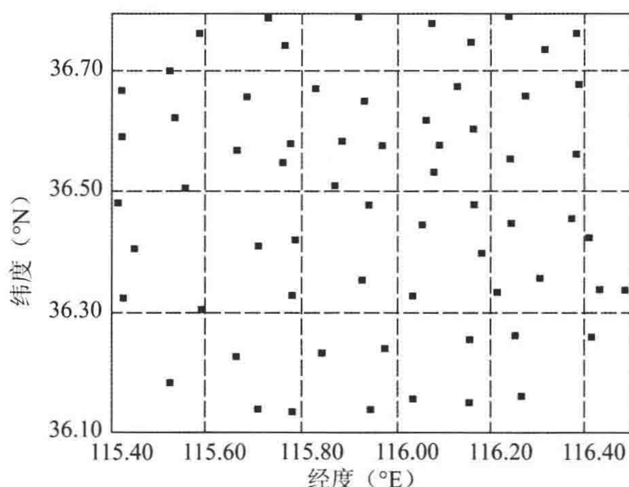


图7-3　L市C级GPS/水准点分布图

7.2.2 几何法确定区域似大地水准面模型基本方法

首先由GPS/水准点的实测高程异常ζ减去GPS/水准点上的模型高程异常ζ_M,获得GPS/水准点的剩余高程异常$\Delta\zeta$,这个过程称为"移去"。根据离散的GPS/水准点剩余高程异常由曲面拟合法形成$2.5'\times2.5'$格网点的剩余高程异常$\Delta\zeta$,然后加上由位模型计算的格网点的模型高程异常ζ_M,这个过程称为"恢复",得到区域似大地水准面格网数值模型。然后通过局部加权平均改化该格网数值模型,作为最后结果。



7.2.3 拟合似大地水准面的确定

利用GPS/水准数据计算实测高程异常。减去模型高程异常得到离散点的剩余高程异常。假设在该区域内的剩余高程异常与大地坐标之间,存在如下近似数学模型：

$$\Delta\zeta_i = a_0 + a_1 B_i + a_2 L_i + a_3 B_i^2 + \cdots + a_9 L_i^3 \tag{7-2-1}$$

式中，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_9$ 为模型参数。

利用离散点上的高程异常值,根据最小二乘原理以三次曲面拟合法计算区域内的高程异常拟和参数,三次多项式中的二次以下低阶项,包含一个偏差参数、两个倾斜参数和三个非线性参数,能分离出系统误差和非系统误差,三次项可将拟合残差限制在较低水平。利用拟和参数计算该区域内 $2.5' \times 2.5'$ 格网点的剩余高程异常,加上格网点上的模型高程异常得到拟合似大地水准面。

7.2.4 局部加权平均改化拟合似大地水准面

为利用GPS/水准数据改化拟合似大地水准面模型,首先计算GPS/水准公共点上的高程异常残差改正数,即：

$$\Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta'_i \ (i = 0, 1, \cdots, 81) \tag{7-2-2}$$

式中，ζ_i 为用GPS/水准观测得到的GPS/水准点的高程异常；ζ'_i 为拟合参数计算的GPS/水准点的高程异常；$\Delta\zeta_i$ 为公共点上的高程异常残差改正数。

将这些残差改正数视为“观测值”,按距离远近进行加权平均,对格网拟合似大地水准面进行改化,其具体表达式为：

$$\Delta\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta\zeta_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{7-2-3}$$

其中权 p 取为GPS/水准点至格网点的距离 d 的倒数,即

$$p_i = 1/(d_i + 0.002) \ (d_i < R_0) \tag{7-2-4}$$

式中的分母内引入因子0.002是为了避免当d很小时权接近无穷大。这里d为地球大圆距离，也可用直线距离代替。R_0为选定的区域半径，称为“搜索半径”，在本节计算中，搜索半径为8 km，仅利用搜索半径区域内的点的残差改正数进行加权平均。插值得到的格网点上的高程异常残差改正数加到拟合似大地水准面上就得到分辨率为$2.5'\times2.5'$似大地水准面的格网数值模型，并作为最后结果。

7.2.5 结果分析

利用IGG05B模型和山东省L市区域内C级GPS网点确定的该区域规则格网点的高程异常等值线图如图7-4所示。该图显示了该区似大地水准面的变化趋势，从东南到西北方向高程异常变化幅度达4.8 m，总体看来，该区似大地水准面比较平缓。为验证所用方法的可靠性，对GPS/水准方法得出的似大地水准面模型进行内符合精度和外符合精度的评定，利用地球重力位模型和GPS/水准数据构建的$2.5'\times2.5'$高程异常格网，内插81个C级GPS/水准点的高程异常，并和用三次曲面拟合方法得出的高程异常与GPS/水准实测高程异常进行比较。由于81个C级GPS/水准点参加了似大地水准面模型的构建，此差值可以看作内符合精度的度量。利用在该区域布设的35个D级GPS点作为外符合精度检核数据，35个D级GPS点也均以三等精度进行了水准观测。由于35个D级GPS点没有参与似大地水准面模型的构建，检测结果作为外符合精度的检验，精度检验差值统计结果列于表7-3。

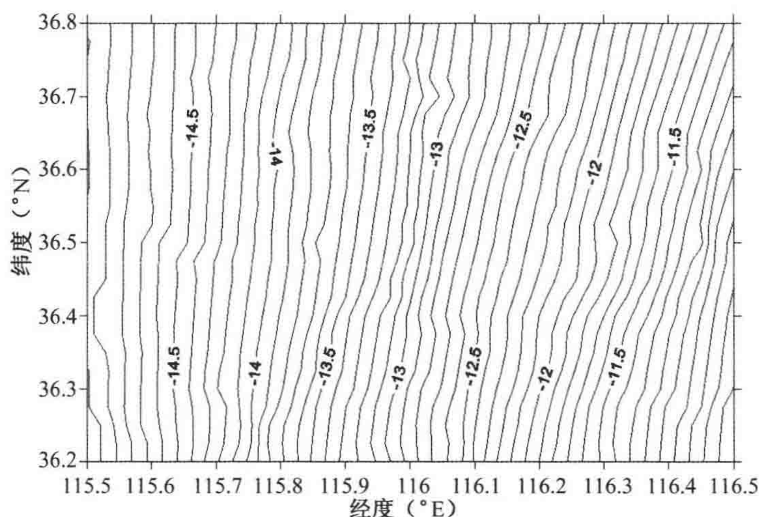


图 7-4　似大地水准面高程异常等值线图

表 7-3　　似大地水准面内、外符合精度统计与比较　　单位：m

	检核点个数	最大值	最小值	平均值	标准差
内符合精度	81	0.071	−0.042	0.0040	±0.0228
外符合精度	35	0.112	−0.083	0.0010	±0.0458

从表 7-3 的比较数据来看，可以得出结论，似大地水准面模型较逼真地表示了地区高程异常的局部特征，格网似大地水准面高程异常精度明显优于拟合高程异常，外符合精度在该区域优于 5.0 cm，表明似大地水准面模型精度达到厘米级。

利用高阶全球重力位模型和 GPS/水准观测数据确定似大地水准面，实质是将地球位模型计算的似大地水准面拟合于 GPS/水准实测的似大地水准面，并利用残差高程异常进行局部改化。在地形起伏平缓的平原和丘陵地区均能取得良好的结果。该方法的缺点是对 GPS/水准观测数据的质量依赖性过大，在高程异常趋势性明显

的地区，要求 GPS/水准点分布均匀，密度适宜。在高程异常变化不规则地区，不仅要求 GPS/水准点有一定的密度，还要求 GPS/水准点布设到高程异常变化的特征点上。

7.3 利用二次平差法建立GPS平面和高程一体工程控制网研究

随着 GPS 技术在测绘领域的广泛应用，GPS 测量在平面控制方面发挥了巨大的作用。工程测量中的高程控制仍沿用传统的水准测量的方法，传统的 GPS 高程测量方法是将重力数据确定的高分辨率但与现势高程基准不一致的重力似大地水准面模型拟合于与现势高程基准一致但分辨率低的 GPS/水准似大地水准面上，形成规则高程异常格网数值模型，在应用时，通过内插高程异常和 GPS 观测大地高确定观测点的正常高。

本节提出直接利用重力似大地水准面内插高程异常，并联测高等级水准点的 GPS 平面和高程一体控制网布设新方法——二次平差法，由于高等级水准点分布广泛，二次平差法 GPS 控制网更易布设。通过利用山东省 L 市 C 级 GPS 控制网的实际计算分析，并与传统 GPS 高程测量的精度进行了比较，得出一些有益的结论。GPS 平面和高程一体控制网改变了平面控制网和高程控制网分离的传统模式，也为困难区域高程控制测量提供了新的思路。

7.3.1 GPS 平面和高程一体工程控制网原理与研究方法

GPS 平面和高程一体控制网布设的过程中，除按要求联测一定数量高等级平面控制点外，在测区控制区域内选择一定数量的高程控制点进行联测，高程控制点的数量与等级按测区大小和对高程精度的要求确定。

GPS 外业观测结束后，首先进行 GPS 控制网的概算，获得所有 GPS 观测网点的大地坐标，按高程控制点的大地坐标在重力似大地



水准面中内插高程控制点的高程异常 ζ，由于高程控制点的正常高 h 是已知的，可由高程控制点的高程异常 ζ 和正常高 h 计算大地高 H 。

将高程控制点的大地高代入 GPS 平面和高程一体控制网进行高程约束，并和平面控制一起进行平差计算，得到 GPS 控制网点的平面坐标和大地高。按 GPS 控制网点的大地坐标(经、纬度)在重力似大地水准面中内插各 GPS 控制网点的高程异常 ζ，GPS 控制网点正常高可由 ζ 和 H 计算，这样就得到工程中常用的正常高程(海拔高程)。由于在计算 GPS 控制网点的高程过程中，对 GPS 控制网进行了两次平差计算，所以称该方法为"二次平差法"。

7.3.2　二次平差法与传统 GPS 高程测量精度分析

传统方法进行 GPS 高程测量首先将重力似大地水准面拟合于由几个 GPS/水准点控制的 GPS/水准似大地水准面上形成可应用模型，作为 GPS 高程测量的参考框架。其具体做法是利用 GPS/水准点上实测高程异常与重力似大地水准面内插高程异常之差作为"观测值"，即

$$\Delta\zeta_i = (H_i - h_i) - \zeta_i \ (i = 1,2,\cdots,n) \tag{7-3-1}$$

式中，n 为用于拟合的 GPS/水准点数。

利用曲面拟合法计算重力似大地水准面格网结点的高程异常残差 $\Delta\zeta_k$，加到重力似大地水准面格网数值模型上，作为高程测量的参考框架：

$$\zeta_k' = \zeta_k + \Delta\zeta_k \ (k = 1,2,\cdots,m) \tag{7-3-2}$$

式中，ζ_k' 为与我国高程基准一致的似大地水准面格网高程异常；m 为格网结点总数。

传统方法 GPS 控制网布设过程中与已知大地高的高等级 GPS 点联测，并在似大地水准面模型中内插高程异常，按式(7-1-1)的关系获得正常高。将高等级水准点的高程视为真值，设以重力似大地水准面内插高程异常的精度为 m_ζ，GPS 测量大地高的精度为 m_H，

忽略内插和拟合过程引入的误差，传统方法获得正常高的精度为：

$$m_h = \sqrt{2m_\zeta^2 + 2m_H^2} \tag{7-3-3}$$

二次平差法是将GPS控制网点的高程异常拟合到重力似大地水准面上，直接利用大地高和重力似大地水准面内插高程异常按式(7-1-1)的关系计算正常高，二次平差法获得正常高的精度为：

$$m'_h = \sqrt{m_\zeta^2 + m_H^2} = \frac{m_h}{\sqrt{2}} \tag{7-3-4}$$

从以上分析可以看出，二次平差法比传统方法精度大约可提高30%左右。

7.3.3 GPS平面和高程一体控制网实例计算分析

利用山东省L市C级GPS控制网为研究数据，该网具体情况可参看5.4.2节。首先假定网内均匀分布的17点LC003、LC006、LC011、LC014、LC019、LC021、LC025、LC030、LC040、LC042、LC044、LC049、LC058、LC059、LC062、LC068和LC073为已知高程点，即高程起算点(事实上，可以找到足够高等级水准点，作为高程起算点)。GPS控制网的概算获得所有GPS网点的大地坐标，按大地坐标利用区域内的重力异常格网数据计算所有GPS网点上的高程异常 ζ。在17个高程起算点控制点上按式(7-1-1)计算大地高 H，17个高程起算点的大地高计算结果如表7-4所示。

表7-4　高程起算点的大地高计算结果　单位：m

点名	正常高	高程异常	计算大地高
LC003	24.463	−8.387	16.076
LC006	34.144	−10.162	23.982
LC011	28.105	−8.888	19.217
LC014	33.960	−10.393	23.567
LC019	26.023	−8.315	17.708



续表

点名	正常高	高程异常	计算大地高
LC021	35.949	−11.455	24.494
LC025	32.931	−9.836	23.095
LC030	28.239	−8.83	19.409
LC040	41.729	−11.810	29.919
LC042	34.720	−10.498	24.222
LC044	31.802	−9.385	22.417
LC049	34.767	−7.693	27.074
LC058	39.587	−11.133	28.454
LC059	35.827	−10.010	25.817
LC062	34.822	−8.462	26.360
LC068	44.805	−11.542	33.263
LC073	42.744	−10.376	32.368

利用17个点的大地高对GPS平面和高程一体控制网进行高程约束，并和平面控制一起进行平差计算，得到所有GPS控制网点的平面坐标和大地高。再由GPS控制网点的大地高和高程异常计算正常高，得到工程中常用的以似大地水准面为基准的正常高（海拔高程）。计算得到64个GPS控制网点正常高与水准实测高程比较结果列于表7-5。

表7-5　二次平差法计算正常高和水准实测高程比较结果　　单位：m

	检核点个数	最大值	最小值	平均值	标准差
水准实测	64	0.212	−0.289	−0.003	0.0822
二次平差法	64	0.121	−0.142	−0.004	0.0563

以上比较可以看出，联测水准点的GPS控制网结合重力似大地水准面模型通过二次平差可以同时得到高精度平面坐标和正常高，该方法比传统方法精度有明显提高，与精度分析的结果基本一致。

7.3.4 提高 GPS 平面和高程一体控制网高程精度的措施

GPS 平面和高程一体工程控制网高程测量的精度与高程异常的计算精度和 GPS 椭球高的测量精度密切相关，可通过加密重力测量和利用高分辨率数字高程模型(DEM)充分考虑地形起伏对高程异常的影响来提高高程异常的计算精度。在 GPS 控制网观测过程中，可通过合理选择点位、选择最佳卫星分布和延长观测时间等措施提高 GPS 数据的观测质量，以获得高精度的椭球高。GPS 平面和高程一体工程控制网具有点间不需通视、误差不累积、降低劳动强度和提高工作效率等优点，可以取代传统的水准测量方法得到 GPS 观测点的正常高。

7.4 GPS 平面和高程一体控制网在水利工程中的应用分析

水利工程大多建设在困难地区，交通不便、地形复杂、通视条件差、国家水准点稀少、水准测量线路相对较长，这些条件的限制使得高程测设极为困难。GPS 相对定位技术能够获得所测点位高精度的大地高差，但水利工程测量中的高程控制仍沿用传统的水准测量的方法。本节主要研究 GPS 平面和高程一体控制网在水利工程中的应用。与传统水准测量相比，GPS 平面和高程一体控制网具有 GPS 点间不需通视、降低劳动强度、误差不累积和提高工作效率等诸多优点，可以满足水利工程中、小比例尺地形图图根控制和河道纵、横断面端点对高程的精度要求，并为“数字水利”提供高效的数据采集系统。本节根据山东省区域内“南水北调东线一期工程鲁北段线路工程测量 D 级 GPS 控制网”和“南四湖上级湖 D 级 GPS 控制网”，结合山东省区域重力似大地水准面模型进行水利工程 GPS 平面和高程一体控制网的布设研究。



7.4.1　南四湖上级湖地形测量GPS平面和高程一体控制网研究

南四湖位于苏、鲁两省交界处，是南阳湖、独山湖、昭阳湖、微山湖的总称。由二级坝枢纽将南四湖一分为二，二级坝枢纽以南为下级湖（即微山湖），以北为上级湖（南阳湖、独山湖和昭阳湖）。南四湖湖区狭长，其中上级湖湖区面积约609 km^2。上级湖四周大堤树木高大茂密，湖中芦苇、莲藕、杂草遍布。首级GPS控制网测量采用Leica SR530（Rush）型双频RTK GPS卫星接收机与Trimble 4600Ls型单频GPS卫星接收机联合作业的方式施测。基线解算、GPS网平差、坐标转换等根据仪器型号的差异采用Leica SKI Pro和Trimble Geographic Office软件进行，静态网在WGS-1984下进行无约束平差，其点位中误差的数量级为毫米级。首级GPS控制网点中有163点进行四等水准观测，可应用的GPS/水准点为163点，GPS网点分布如图7-5所示。

首先假定网内均匀分布的7点HWS25、HWS42、HWS60、HWS75、HWS102、HWS127和HWS152为已知高程点，即高程起算点（在工程应用中，可以在高等级水准点上进行GPS联测，作为控制网中的高程控制）。利用重力似大地水准面模型和GPS观测基线数据，计算其他156点的海拔高程，所得结果与工程实施中实测高程进行比较。将实测高程作为“真值”进行精度统计。具体步骤为：

(1)首先进行GPS平面和高程控制网的概算，获得所有GPS网点的大地坐标，按大地坐标利用重力似大地水准面模型内插计算所有GPS网点上的高程异常 ζ。

(2)在高程起算上，按式(7-1-1)计算大地高 H，7个高程起算点的大地高计算结果如表7-6所示。

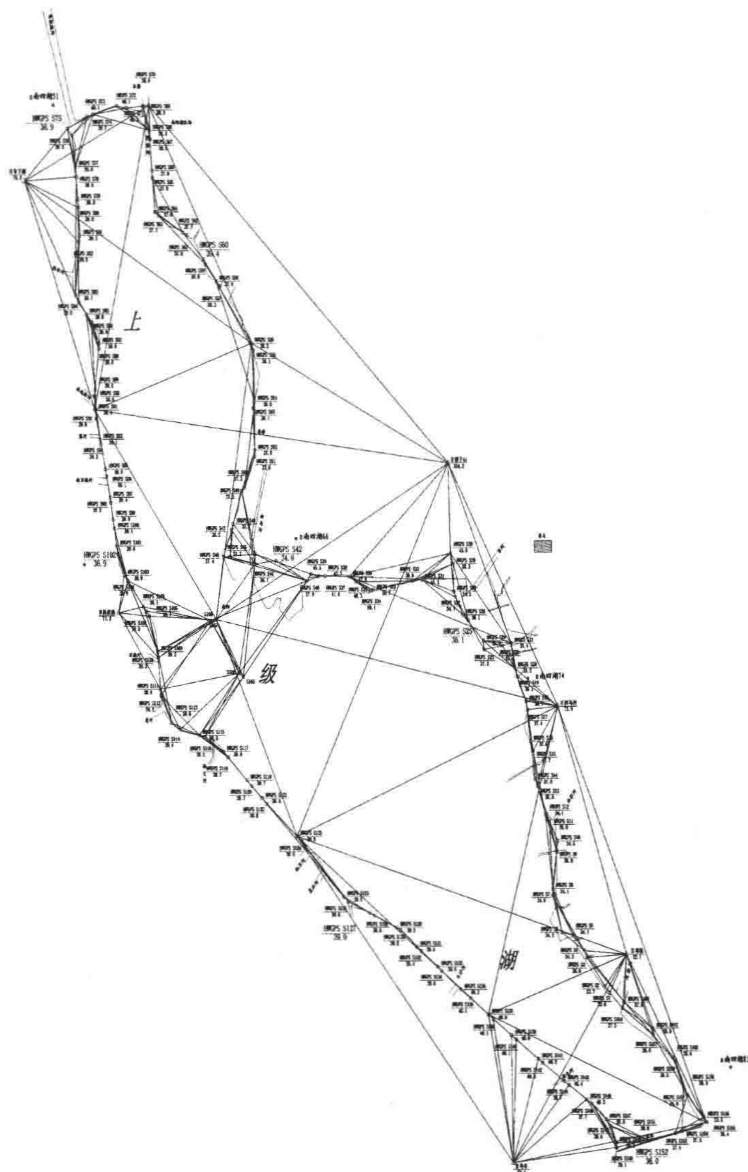


图 7-5　南四湖上级湖 D 级 GPS 网点分布



表 7-6　　7 个高程起算点的大地高计算结果　　单位：m

点名	正常高	高程异常	计算大地高
HWS25	36.091	−5.639	30.452
HWS42	34.942	−6.221	28.721
HWS60	39.444	−6.630	32.814
HWS75	38.905	−7.030	31.875
HWS102	38.888	−6.697	32.191
HWS127	39.009	−5.873	33.136
HWS152	36.030	−5.091	30.939

(3)利用 7 点将高程控制点的大地高对 GPS 三维控制网进行高程约束，并和平面控制一起进行平差计算，得到所有 GPS 控制网点的平面坐标和大地高。

(4)由 GPS 控制网点的大地高和高程异常计算正常高，得到其余 156 点的正常高。156 个 GPS 控制网点正常高与水准实测高程之差范围结果列于表 7-7 和表 7-8。

表 7-7　　计算正常高与水准实测高程之差区间统计　　单位：m

高程差范围	−0.14～−0.10	−0.10～−0.05	−0.05～0.00	0.00～0.05	0.050～0.100
点个数	6	15	77	47	11
所占百分比	3.8%	9.6%	49.4%	30.1	7.1%

表 7-8　　计算正常高与水准实测高程之差统计结果　　单位：m

点个数	最大值	最小值	平均值	标准差
156	0.096	−0.139	−0.010	±0.0426

从表中比较数据来看，计算高程与水准实测高程之差绝对值小于0.05 m占所有点总数的79.5%，标准差小于0.05 m，总体符合较好，说明方法运用可靠。

《水利水电工程测量规范》(规划设计阶段)要求，1∶500比例尺地形图的基本等高距在平地选用0.5 m，小于1∶1000(包括1∶1000)比例尺地形图的基本等高距在平地可选用0.5 m或1.0 m。高程注记点的精度在平地和丘陵应小于$\pm h/4$（h为基本等高距）。精度优于0.05 m的正常高可以满足水利水电工程小于1∶500(包括1∶500)比例尺地形图测绘和相应比例尺航测成图对高程控制的精度要求，可代替四等及以下低等级水准测量，为大、中型水利工程高程测量提供新的思路。

7.4.2 南水北调东线一期工程鲁北段GPS平面和高程一体控制网研究

南水北调东线一期工程鲁北段位于山东省L市和德州市，首级GPS卫星定位测量采用了4台Trimble 4600LS型单频接收机施测。观测时做到同时锁定4颗以上的卫星信号，且卫星的高度角不小于15度，GDOP值小于6。观测历元为15秒，观测时间一般为30～45分钟。基线解算、GPS网平差、坐标转换统一采用Leica SKI-Pro(V2.5)软件进行。首级GPS静态网共含有48个观测点、138条基线，其中40点进行了水准观测，可利用GPS/水准点为40点，静态网在WGS-84坐标系下进行无约束平差，其点位中误差的数量级为毫米级。GPS网点分布如图7-6所示。

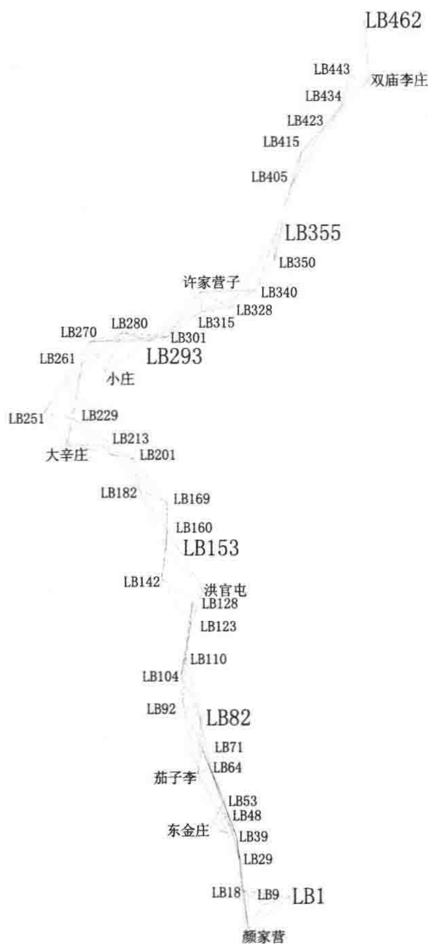


图 7-6　南水北调东线一期工程鲁北段 GPS 网点分布

首先假定网内均匀分布的 6 点 LB1、LB82、LB153、LB293、LB355 和 LB462 为已知高程点，即高程起算点（事实上，可以在线路上找到足够高等级水准点，作为高程起算点）。利用 GPS 观测数据和区域重力似大地水准面模型按二次平差法计算其他 34 点的海拔

高程，所得结果与工程实施中四等水准实测高程进行比较，将实测高程作为"真值"进行精度统计。具体步骤为：

(1)首先进行 GPS 三维控制网的概算，获得所有 GPS 网点的大地坐标，按大地坐标利用区域区域重力似大地水准面模型计算所有 GPS 网点上的高程异常 ζ。

(2)在高程起算上，按式(7-1-1)计算大地高 H，6 个高程起算点的大地高计算结果如表 7-9 所示。

表 7-9　　6 个高程起算点的大地高计算结果　　单位：m

点名	正常高	高程异常	计算大地高
LB1	42.503	−9.355	33.148
LB82	34.225	−10.05	24.175
LB153	36.243	−10.37	25.873
LB293	31.152	−10.507	20.645
LB355	25.883	−9.631	16.252
LB462	28.77	−9.104	19.666

(3)利用 6 点将高程控制点的大地高对 GPS 三维控制网进行高程约束，并和平面控制一起进行平差计算，得到所有 GPS 控制网点的平面坐标和大地高。

(4)由 GPS 控制网点的大地高和内插 GPS 控制网点的高程异常计算正常高，得到工程中常用的以似大地水准面为基准的高程(海拔高程)。计算得到 34 个 GPS 控制网点正常高与水准实测高程比较结果列于表 7-10。



表 7-10　　计算正常高与水准实测高程比较结果　　单位:m

点名	水准实测高程	计算高程异常	平差大地高	计算高程	实测与计算高程差
LB104	33.819	−10.263	23.540	33.803	0.016
LB110	33.290	−10.254	23.041	33.295	−0.005
LB123	33.236	−10.259	23.049	33.308	−0.072
LB128	32.897	−10.249	22.721	32.970	−0.073
LB142	33.506	−10.391	23.071	33.462	0.044
LB160	34.917	−10.356	24.573	34.929	−0.012
LB169	33.603	−10.362	23.262	33.624	−0.021
LB18	37.258	−9.730	27.477	37.207	0.051
LB182	33.309	−10.520	22.802	33.322	−0.013
LB201	33.770	−10.532	23.234	33.766	0.004
LB213	34.293	−10.687	23.529	34.216	0.077
LB229	36.137	−10.969	25.148	36.117	0.020
LB251	40.219	−11.119	29.030	40.149	0.070
LB261	32.958	−10.883	22.039	32.922	0.036
LB270	30.421	−10.869	19.565	30.434	−0.013
LB280	28.568	−10.699	17.911	28.610	−0.042
LB29	36.810	−9.758	27.097	36.855	−0.045
LB301	30.600	−10.400	20.194	30.594	0.006
LB315	29.354	−10.196	19.204	29.400	−0.046
LB328	26.951	−9.998	16.996	26.994	−0.043
LB340	25.855	−9.810	16.083	25.893	−0.038
LB350	26.719	−9.659	17.081	26.740	−0.021

续表

点名	水准实测高程	计算高程异常	平差大地高	计算高程	实测与计算高程差
LB39	36.791	−9.771	27.048	36.819	−0.028
LB405	28.839	−9.571	19.268	28.839	0.000
LB415	26.539	−9.441	17.056	26.497	0.042
LB423	26.894	−9.342	17.550	26.892	0.002
LB434	27.032	−9.207	17.812	27.019	0.013
LB443	27.047	−9.143	17.865	27.008	0.039
LB48	36.903	−9.788	27.099	36.887	0.016
LB53	35.482	−9.811	25.667	35.478	0.004
LB64	34.432	−9.985	24.499	34.484	−0.052
LB71	34.755	−10.016	24.758	34.774	−0.019
LB9	36.730	−9.538	27.115	36.653	0.077
LB92	33.187	−10.218	22.950	33.168	0.019
标准差					0.0398

根据表中数据的统计结果，如果把水准实测高程当作真值，计算得到的正常高精度应该小于±0.040 m，如果顾及水准实测高程的中误差±0.019 m，计算得到的正常高精度也应该优于±0.050 m，可以满足该工程项目对高程的精度要求。

参考文献

[1]宁津生. 跟踪世界发展动态 致力地球重力场研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2001,26(6):471-474.

[2]许厚泽. 卫星重力研究:21 世纪大地测量研究的新热点[J]. 测绘科学,2001,26(3):382-384.

[3]管泽霖,管铮,黄谟涛,等. 局部重力场逼近理论和方法[M]. 北京:测绘出版社,1997.

[4]许厚泽. 重力测量技术及重力学研究进展(二十三届 IUGG 大会评述)[J]. 地理空间信息,2003,1(3):3-4.

[5]申文斌,宁津生,李建成,等. 论相对论重力位及相对论大地水准面[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2004,29(10):897-900.

[6]申文斌,宁津生,李建成,等. 论大地水准面[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2003,28(6):683-687.

[7]Song Lei, Hu Wusheng. Establish GPS 3-dimension engineering control network using gravity quasi-geoid[J]. Procedia Engineering,2012(28):346-350.

[8]荣敏,周巍,陈春旺. 重力场模型 EGM2008 和 EGM96 在中国地区的比较与评价[J]. 大地测量与地球动力学,2009,29(6):123-125.

[9]Beutler G, Jäggi A, Mervart L. The celestial mechanics approach: application to data of the GRACE mission[J]. Journal of

Geodesy，2010，84：661-681.

[10]宋雷，方剑，黄腾. Bayesian 正则化 BP 神经网络拟合两类似大地水准面[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2009，34(5)：552-555.

[11]章传银，郭春喜，陈俊勇，等. EGM2008 地球重力场模型在中国大陆适用性分析[J]. 测绘学报，2009，38(4)：283-289.

[12]于锦海，彭富清. 超定大地边值问题的变分解及相关理论[J]. 中国科学(D 辑)，2007，37(1):39-45.

[13]李斐，陈武，岳建利. GPS/重力边值问题的求解及应用[J]. 地球物理学报，2003，46(5):595-599.

[14]李斐，陈武，岳建利. GPS 在物理大地测量中的应用及 GPS 边值问题[J]. 测绘学报，2003，32(3)：198-203.

[15]张利明. GPS/重力边值问题及其应用研究[D]. 武汉：中国科学院测量与地球物理研究所，2007.

[16]于锦海，张传定. GPS-重力边值问题[J]. 中国科学(D 辑)，2003，33(10)：988-996.

[17]方剑. 中国及邻区均衡重力异常及其地球动力学特征[D]. 北京：中国地震局地质研究所，2006.

[18]楼立志. 中国及邻区模拟大地水准面的研究[D]. 武汉:中国科学院测量与地球物理研究所，2004.

[19]Gerlach Ch, Sneeuw N, Visser P, et al. CHAMP gravity field recovery using the energy balance approach: First Results [C]// First CHAMP Mission Results for Gravity Magnetic and Atmospheric Studies. Germany:Springer, 2002.

[20]Howe E, Tscherning C C. Preliminary analysis of CHAMP state vector and accelerometer data for the recovery of the gravity potential[C]//First CHAMP Mission Results for Gravity Magnetic and Atmospheric Studies. Germany: Springer, 2002.

[21]徐天河. 利用 CHAMP 卫星轨道和加速度计数据推求地



球重力场模型[D].郑州:解放军信息工程大学，2004.

[22]Gerlach Ch，Sneeuw N，Visser P，et al. CHAMP gravity field recovery using the energy balance approach[J]. Advances in Geosciences，2003(1)：73-80.

[23]Visser P，Sneeuw N，Gerlach C. Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates[J]. Journal of Geodesy，2003，77：207-216.

[24]Jekeli C. The determination of gravitational potential differences from SST tracking[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy，1999，75：85-101.

[25]Howe E，Stensengt L，Tscherning C C. Analysis of one month of CHAMP state vector and accelerometer data for the Recovery of the gravity potential[J]. Advances in Geosciences，2003(1)：1-4.

[26]宁津生，罗佳. 数字城市中大地水准面的功能与精化技术[J]. 地理空间信息，2006，4(1)：1-5.

[27]Duquenne H. Comparison and combination of a gravimetric quasigeoid with a levelled GPS data set by statistical analysis[J]. Physics and Chemistry of the Earth，1999，24(1)：79-83.

[28]Martín A，Anquela A B，Padín J，et al. Detection of local geoid deformations by gravity disturbances from GPS/gravimetric observations[J]. Studia Geophysica et Geodaetica，2005(49)：43.

[29]Novak P，Kern M，Schwarz K P，et al. On geoid determination from airborne gravity[J]. Journal of Geodesy，2003，76：510-522.

[30]李建成，姜卫平，秦政国，等. 无锡市厘米级似大地水准面的研究[J]. 地理空间信息，2005，3(2)：1-5.

[31]宋雷，黄腾，方剑，等. 区域似大地水准面精化及水利工程应用分析[J]. 河海大学学报(信息科学版)，2008，36(1)：93-96.

[32]Meyer T H, Roman D R, Zilkoski D B. What does height really mean? (Part I: Introduction)[J]. Surveying and Land Information Science, 2004, 64(4): 223-233.

[33]Meyer T H, Roman D R, Zilkoski D B. What does height really mean? (Part II: Physics and Gravity)[J]. Surveying and Land Information Science, 2005, 65(1): 5-15.

[34]Featherstone W E. Evidence of North-South trend between AUSGeoid 98 and the Australian height datum in Southwest Australia[J]. Survey Review, 2004, 37(291): 334-343.

[35]Gachari M K, Olliver J G. A high resolution gravimetric geoid of the Eastern Africa region[J]. Survey Review, 1998, 34(269): 421-436.

[36]Nahavandchi H, Sjoberj L E. Precise geoid determination over Sweden using the Stokes-Helmert method and improved topographic corrections[J]. Journal of Geodesy, 2001, 75: 74-88.

[37]宁津生，罗志才，李建成. 我国省市级大地水准面的现状及技术模式[J]. 大地测量与地球动力学，2004，24(1)：4-8.

[38]魏子卿，王刚. 用地球位模型和 GPS/水准数据确定我国大陆似大地水准面[J]. 测绘学报，2003，32(1)：1-5.

[39]晁定波. 关于我国似大地水准面的精化及有关问题[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2003，28(SIP)：110-114.

[40]李建成，陈俊勇，宁津生，等. 地球重力场逼近理论与中国 2000 似大地水准面的确定[M]. 武汉：武汉大学出版社，2003.

[41]Hagan M T, Menhaj M. Training multiplayer networks with the Marquardt algorithm[J]. IEEE Transactions on neural networks, 1994, 5(6): 989-993.

[42] Hirt C, Featherstone W E, Marti U. Combining EGM2008 and SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of



gravity data[J]. Journal of Geodesy, 2010, 84: 557-567.

[43]李红霞，许士国，范垂仁. 基于贝叶斯正则化神经网络的径流长期预报[J]. 大连理工大学学报，2006，46(SUP)：174-177.

[44]Hormik K. Approximation capability of multiplayer feed-forward network[J]. Neural Networks, 1991(4): 251-257.

[45]Darbeheshti N, Featherstone W E. Tuning a gravimetric quasigeoid to GPS-levelling by non-stationary least-squares collocation[J]. Journal of Geodesy, 2010, 84: 419-431.

[46]宋雷，黄腾，方剑，等. 基于贝叶斯正则化 BP 神经网络的 GPS 高程转换[J]. 西南交通大学学报，2008(43)：724-728.

[47]胡伍生，华锡生. 平坦地区转换 GPS 高程的混合转换方法[J]. 测绘学报，2002，31(2)：128-133.

[48]胡伍生. GPS 精密高程测量理论与方法及其应用研究[D]. 南京：河海大学，2001.

[49]沈云中. 应用 CHAMP 卫星星历精化地球重力场模型的研究[D]. 武汉：中国科学院测量与地球物理研究所，2000.

[50]陆洋. 利用卫星测高数据改善地球重力场模型的研究[D]. 武汉：中国科学院测量与地球物理研究所，1997.

[51]周旭华. 卫星重力及其应用研究[D]. 武汉：中国科学院测量与地球物理研究所，2005.

[52]Ditmar P, Klees R, Kostenko F. Fast and accurate computation of spherical harmonic coefficients from satellite gravity gradiometry data[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76: 690-705.

[53]Cheng M K. Gravitation perturbation theory for inter-satellite tracking[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76: 169-185.

[54]宁津生. 卫星重力探测技术与地球重力场研究[J]. 大地测量与地球动力学，2002，22(1)：1-5.

[55]夏哲仁，石磐，李迎春. 高分辨率区域重力场模型 DQM 2000[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2003，28(特刊)：125-128.

[56] Reigber Ch, Balmino G, Schwintzer P, et al. A high quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and Accelerometry (EIGEN-1S)[J]. Geophysical Research Letters, 2002, 29(14): 371-374.

[57]Reigber Ch, Schwintzer P, Neumayer K H, et al. The CHAMP-only earth gravity field model EIGEN-2[J]. Advances in Space Research, 2003: 31(8): 1883-1888.

[58]Visser P, van den Ijssel J. Verification of CHAMP accelerometer servations[J]. Advances in Space Research, 2003, 31 (8): 1905-1910.

[59]Visser P, Sneeuw N, Gerlanch C. Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77(4): 207-216.

[60]Gerlanch C, Sneeuw N, Visser P, et al. CHAMP gravity field recovery with the energy balance approach: First results[C]// The 1st CHAMP International Science Meeting, Potsdam, 2002.

[61]Han S C, Jekeli C, Shum C K. Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP [J]. Geophysical Research Letters, 2002, 29(16):361-364.

[62]Deleflie F, Exertier P, Berio P, et al. A first analysis of the mean motion of CHAMP[J]. Advances in Geosciences, 2003 (1): 95-101.

[63]Pail R, Bruinsma S, Migliaccio F. First GOCE gravity field models derived by three different approaches[J]. Journal of Geodesy, 2011, 85: 819-843.

[64]Visser P, van den Ijssel J. Verification of CHAMP accelerometer observations[J]. Advances in Space Research, 2003, 31 (8): 1905-1910.

[65]Forste C. CHAMP accelerometer data preprocessing-lev-



el-2 data generation at GFZ Potsdam[C]//The 1st CHAMP International Science Meeting. Potsdam, 2002.

[66]Reigber Ch, Jochmann H, Wünsch J, et al. Earth gravity field and seasonal variability from CHAMP[C]//Reigber Ch (eds.), Earth Observation with CHAMP—Results from Three Years in Orbit. Berlin: Springer, 2005: 25-30.

[67]Gerlach Ch, Foldvary L, Svehla D, et al. A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integra[J]. Geophysical Research Letters, 2003, 30(20):2037-2040.

[68]吴斌，彭碧波. 星载GPS技术的低轨卫星精密定轨的研究进展[C]//大地测量与地球动力学进展论文集. 武汉：湖北科学技术出版社，2004：265-271.

[69]Reigber Ch, Schwintzer P, Neumayer, K H, et al. A high resolution global gravity field model combining CHAMP and GRACE satellite mission and surface gravity:EIGEN-CG01C [C]//Joint CHAMP/GRACE science meeting, GFZ,Potsdam, 2004.

[70]Pnam V, Sneeuw N, Gerlach C. Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 207-216.

[71]高为广，杨元喜. 神经网络辅助的GPS/INS组合导航故障检测算法[J]. 测绘学报，2008，37(4)：404-409.

[72]李克行，黄城. GOCE卫星重力计划及其应用[J]. 天文学进展，2005，23(1)：29-38.

[73]许厚泽，周旭华，彭碧波. 卫星重力测量[J]. 地理空间信息，2005(1)：1-3.

[74]管泽霖，宁津生. 地球形状与外部重力场(上、下)[M]. 北京：测绘出版社，1981.

[75]管泽霖，管铮，黄谟涛，等. 局部重力场逼近理论和方法[M]. 北京:测绘出版社，1997.

[76]郭俊义. 物理大地测量学基础[M]. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1994.

[77]海斯卡涅 W A，莫里兹 H. 物理大地测量学(中译本)[M]. 北京：测绘出版社，1967.

[78]Merry C L. DEM-induced errors in developing a quasi-geoid model for Africa[J]. Journal of Geodesy，2003，77：537-542.

[79]Jeyapalan K. Local geoid determination using global positioning systems[J]. Land Information Science，2004，64(1)：65-75.

[80]罗志才，陈永奇，宁津生. 地形对确定高精度局部大地水准的影响[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2003，28(3)：340-344.

[81]章传银，晁定波. 厘米级高程异常地形影响的算法及特征分析[J]. 测绘学报，2006，35(4)：308-314.

[82]Rapp R H. Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference[J]. Journal of Geodesy，1997，71：282-289.

[83]Smith D A，Milbert D G. The GEOID96 high-resolution geoid height model for the United States[J]. Journal of Geodesy，1999，73：219-236.

[84]Smith D A，Roman D R. GEOID99 and G99SSS：1-arc-minute geoid models for the United States[J]. Journal of Geodesy，2001，75：469-490.

[85]Kern M，Schwarz K P，Sneeuw N. A study on the combination of satellite，airborne，and terrestrial gravity data[J]. Journal of Geodesy，2003，77：217-225.

[86]Kuroishi Y，Ando H，Fukuda Y. A new hybrid geoid model for Japan，GSIGEO2000[J]. Journal of Geodesy，2002，76：428-436.



[87]Kotsakis C, Sideris M G. On the adjustment of combined GPS/leveling/geoid networks[J]. Journal of Geodesy, 1999, 73: 412-421.

[88]Delacy M C, Marin E. A gravimetric geoid computation and comparison with GPS results in northeast Andalusia(Spain)[J]. Studia Geophysica et Geodaetica, 2001(45): 55-66.

[89]Kiamehrand R, Sjoberg L E. Comparison of the qualities of recent global and local gravimetric geoid models in Iran[J]. Studia Geophysica et Geodaetica, 2005(49): 289-304.

[90]Roman D R, Wang Yanming, Henning W, et al. Assessment of the new national geoid height model-GEOID03[J]. Surveying and Land Information Science, 2004, 64(3): 153-162.

[91]Serpas J G, Jekeli C. Local geoid determination from airborne vector gravimetry[J]. Journal of Geodesy, 2005, 78(10): 577-587.

[92]Omang O C D, Forsberg R. The northern European geoid: a case study on long-wavelength geoid errors[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76: 369-380.

[93]Agren J. The analytical continuation bias in geoid determination using potential coefficients and terrestrial gravity data[J]. Journal of Geodesy, 2004, 78(4-5): 314-332.

[94]Kirby J F. On the combination of gravity anomalies and gravity disturbances for geoid determination in Western Australia[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 433-439.

[95]Sjöberg L E. A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove-compute-restore technique inregional geoid modelling[J]. Journal of Geodesy, 2005, 78: 645-653.

[96]Wang Y M, Rapp R H. Terrain effects on geoid undula-

tion computation[J]. Manuscripta Geodaetica，1990(15)：23-29.

[97]Fei Z L，Sideris M G. A new method for computing the ellipsoidal correction for Stokes' formula[J]. Journal of Geodesy，2000，74：223-231.

[98]宋雷. 测量程序算法及 Visual Basic 语言实现[M]. 济南：山东大学出版社，2013.

[99]高布锡. 天文地球动力学原理[M]. 北京：科学出版社，1997.

[100]罗志才，陈永奇，宁津生. 地形对确定局部高精度大地水准面的影响[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2003，28(3)：340-344.

[101]宁津生，晁定波，李建成. 计算 Stokes 公式的快速 Hartley 变换(FHT)技术[J]. 武汉测绘科技大学学报，1993，18(1)：38-43.

[102]邹贤才，李建成. 最小二乘配置方法确定局部大地水准面的研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2004，29(3)：218-222.

[103]黄谟涛，翟国君，管铮. 利用 FFT 技术计算大地水准面高若干问题研究[J]. 测绘学报，2000，29(2)：124-131.

[104]Smith D A. Computing components of the gravity field induced by distant topographic masses and condensed masses over the entire Earth using the 1-D FFT approach[J]. Journal of Geodesy，2002，76：150-168.

[105]Sun W，Sjöberg L E. Convergence and optimal truncation of binomial expansions used in isostatic compensations and terrain correction[J]. Journal of Geodesy，2001，74：627-636.

[106]Tsoulis A D，Wziontek H，Petrovic S. Bilinear approximation of the surface relief in terrain correction computations[J]. Journal of Geodesy，2003，77：338-344.

[107]宋雷，黄腾，方剑，等. 二次平差法提高 GPS 控制网点的



高程异常确定精度研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(Sup): 7-9.

[108]Song Lei, Hu Xiaoqing. Fitting the GPS/leveling quasi-geoid using bayesian-regulation BP neural network[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 90: 2903-2906.

[109]宋雷, 黄腾, 方剑, 等. 基于贝叶斯正则化 BP 神经网络的 GPS 高程转换[J]. 西南交通大学学报(自然科学版), 2008(6): 679-683.

[110]Sjöberg L E. A general model for modifying Stokes' formula and its least-squares solution. Journal of Geodesy, 2003, 77: 459-464.

[111]陈俊勇, 李建成, 宁津生, 等. 我国大陆高精度高分辨率大地水准面的研究和实施[J]. 测绘学报, 2001, 30(2): 95-100.

[112]张全德, 郭春喜. 浙闽赣区域似大地水准面精化[J]. 测绘科学, 2007, 32(1): 11-17.

[113]张全德, 郭春喜. 华东、华中区域似大地水准面精化[J]. 地理信息世界, 2007, 5(5): 21-26.

[114]Kuhn M. Geoid determination with density hypotheses from isostatic models and geological information[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 50-65.

[115]Smith D A. Computing components of the gravity field induced by distant topographic masses and condensed masses over the entire Earth using the 1-D FFT approach[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76: 150-168.

[116]宋雷, 陈晓华, 胡伍生, 等. 卫星重力信息融合及区域似大地水准面精化应用[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2013, 43(sup II): 316-319.

[117]Nahavandchi H. The direct topographical correction in gravimetric geoid determination by the Stokes-Helmert method[J].

Journal of Geodesy，2000，74：488-496.

[118]Novak P. Geoid determination using one-step integration [J]. Journal of Geodesy，2003，77：193-206.

[119]徐天河，杨元喜，王兴涛. CHAMP 卫星加速度计数据的使用[J]. 测绘通报，2003(3)：3-5.

[120]徐天河，杨元喜. 利用 CHAMP 卫星几何法轨道恢复地球重力场模型[J]. 地球物理学报，2005，48(2)：288-293.

[121]宁津生，罗志才，杨沾吉，等. 深圳市 1 km 高分辨率厘米级高精度大地水准面的确定[J]. 测绘学报，2003，32(2)：102-107.

[122]吴晓平，孙凤华，张传定. 我国重力场与大地水准面的确定和改进[J]. 信息工程大学学报，2004，5(2)：107-117.

[123]宁津生，汪洪海，罗志才. 小波分析在大地测量中的应用及其进展[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2004，29(8)：659-663.

[124]罗佳，宁津生. CHAMP 星载加速度计数据(0.1 Hz)处理与分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2004，29(5)：380-384.

[125]徐天河，杨元喜. 利用现有重力场模型求定 CHAMP 卫星加速度计修正参数[J]. 测绘学报，2004，33(3)：200-204.

[126]陈俊勇. 高精度局域大地水准面对布测 GPS 水准和重力的要求[J]. 测绘学报，2001，30(3)：189-191.

[127]陈俊勇，李建成，宁津生，等. 中国新一代高精度高分辨率大地水准面的研究和实施[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2001，26(4)：283-299.

[128]徐天河，杨元喜. 利用卫星轨迹交叉点标定 CHAMP 卫星加速度计数据[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2004，29(11)：955-959.

[129]彭碧波，吴斌. 应用人卫激光测距技术测定潮汐形变勒夫数[J]. 测绘学报，2000，29(4)：305-309.

[130]周旭华，吴斌. 大气、陆地水储量和海水质量分布变化与



地球低阶引力场球谐系数的关系[J]. 天文学报，2002，43(3)：327-332.

[131]宋雷，方剑，黄腾. Bayesian 正则化 BP 神经网络拟合两类似大地水准面[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2009，34(5)：552-555.

[132]周旭华，吴斌. 水质量分布变化对重力观测的影响[J]. 地球物理学报，2002，45(C00)：340-345.